Rencontre Maths-SPC : pour renouer avec le calcul, Du Primaire au Supérieur

David BEYLOT, Bernard GALIN, Sophie MARCUS, Pascal SAUVAGE,

GREPhyC[1]-IREM[2] Paris7, groupes de Liaison Lycée-Université de l'académie de Créteil.

Version du 27 février 2015

Ce document est une synthèse du stage PAF « *Rencontre Maths-SPC : pour renouer avec le calcul* » animé sur une journée, le 2 décembre 2014 à Paris pour l'académie de Versailles, et de l'atelier « *Difficultés des élèves en calculs : contexte, enjeux et leviers pour le Supérieur* » (1h20) du stage PAF « *Liaison Lycée-Université : favoriser la réussite des élèves en sciences* » animé le 22 janvier 2015 à Champs-sur-Marne, pour l'académie de Créteil.

Ce document a initialement été conçu à destination des collègues de mathématiques et de sciences physiques et chimiques ayant participé aux stages PAF évoqués ci-dessus. Mais il s'adresse aussi plus largement à tout collègue du Primaire, du Secondaire ou du Supérieur désireux de mettre en perspective sa pratique des mathématiques en classe.

L'ambition de ce document est de contribuer à faire progresser l'enseignement des mathématiques et tout particulièrement les aspects calculatoires en montrant notamment que les difficultés des élèves ne sont pas une fatalité. L'objectif du document est de proposer différents cadres d'analyse de ces difficultés, ainsi que des leviers d'actions.

L'esprit du document est à l'image des deux stages PAF : non prescriptif, il se veut avant tout une base de réflexion individuelle et collective, un outil de prise de conscience de ses propres pratiques et de la diversité des pratiques intra et interdisciplinaires, des contextes et des enjeux. Les deux stages rassemblaient une vingtaine de collègues stagiaires en proportions équilibrées d'enseignants de mathématiques et de physique et chimie.

---

[1] *Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des sciences Physiques et Chimiques. Groupe de travail IREM Paris 7 qui rassemble des enseignants de sciences physiques et chimiques ainsi que des chercheurs.* http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/grephyc/

[2] *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Rattachés à des universités et organisés en réseau sur toute la France, les IREM permettent à des enseignants et des chercheurs de travailler ensemble.*
Portail du réseau des IREM : http://www.univ-irem.fr/
IREM de l'université Paris - Diderot Paris 7 : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/

Les auteurs et contributeurs :

David BEYLOT enseigne les mathématiques en collège.

Bernard GALIN a enseigné de nombreuses années les sciences et les mathématiques en lycée professionnel, puis les mathématiques en lycée général ; il assure aujourd'hui à plein temps de la formation initiale en mathématiques pour les Professeurs de Écoles.

Pascal SAUVAGE enseigne la physique et la chimie en lycée ; il a enseigné en IUT Mesures Physiques durant les trois années de son doctorat ; il est aussi formateur académique.

David BEYLOT et Bernard GALIN participent tous deux à des groupes IREM-Paris 7. Pascal SAUVAGE anime le groupe IREM GREPhyC, Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des sciences Physiques et Chimiques.
Ils ont tous les trois conçu et animé ensemble le stage PAF « Rencontre Maths-SPC : pour renouer avec le calcul ».

Sophie MARCUS enseigne les mathématiques en lycée. Avec Pascal SAUVAGE, ils ont conçu et animé l'atelier « Difficultés des élèves en calculs : contexte, enjeux et leviers pour le Supérieur ». Ils ont été amenés à travailler ensemble dans le contexte des groupes académiques Liaison Lycée-Université de mathématiques et de sciences physiques et chimiques de l'académie de Créteil.

David, Bernard, Sophie et Pascal exercent sur l'académie de Créteil.

Merci à Fabrice Vandebrouck, directeur de l'IREM Paris 7, pour avoir provoqué la « rencontre Maths-SPC ».
Merci à Bruno Mombelli, IA-IPR en sciences physiques et chimiques de l'académie de Créteil, pour sa relecture attentive et bienveillante du document.
Merci à Isabelle Lémonon et Pierre Labarbe, enseignants de physique et chimie, pour leurs contributions.
Merci aux collègues des stages PAF et de nos établissements pour nos échanges.
Merci aux élèves d'être ce qu'ils sont.

Contact : pascal.sauvage@ac-creteil.fr

I. DIFFICULTES DES ELEVES EN CALCULS : CONTEXTE ET ENJEUX 5
1. L'EVOLUTION ACTUELLE DES PROGRAMMES EN SCIENCES 5
2. LES EFFETS DE CULTURE DISCIPLINAIRE : « L'ADDITION MISE AU VOTE » 6

II. HOMOGENEITE, GRANDEURS, NOMBRES ET MESURES 7
1. DISCUSSION: « MISE EN EQUATION, REDACTION ET HOMOGENEITE » 7
2. ACTIVITE « ENONCES DE MATHEMATIQUES ET UNITES » 8
3. LES APPLICATIONS NUMERIQUES EN PHYSIQUE ET CHIMIE: 10
4. UNITE, CALCULS ET GRANDEURS : CONTEXTE EPISTEMOLOGIQUE 10
5. GRANDEURS, MESURES ET NOMBRES DANS LE PRIMAIRE ET DANS LE SECONDAIRE 11
   - *Dans le Primaire 11*
   - *Dans le Secondaire 11*
6. LES UNITES AU SERVICE DU CALCUL EN SPC 11
   - *Pour donner du sens au « par », au « / » et aux puissances d'unités 11*
   - *Pour trouver une formule 12*
   - *Pour convertir 12*
   - *Pour vérifier un calcul (analyse dimensionnelle) 12*
   - *Signification du signe égal ? 12*
   - *Unité dans les calculs : une nouvelle astuce ? 12*
7. UNITES EN SPC, CONSTANTES FONDAMENTALES ET SYSTEME INTERNATIONAL (SI) 13
   - *Choix des unités : une question de contextes 13*
   - *Une constante fondamentale, mais plusieurs choix d'unités 14*
8. L'HOMOGENEITE AU SERVICE DES MATHEMATIQUES ET DU SUPERIEUR 15
   - *L'homogénéité au service des formules du cercle 15*
   - *L'homogénéité pour mieux comprendre la notation intégrale 15*
   - *L'homogénéité au service de l'algèbre matricielle et tensorielle 15*

III. L'INVERSION DE FORMULE 15
1. ASTUCES POUR ISOLER UNE VARIABLE 16
   - *Astuce 1 : le produit en croix 16*
   - *Astuce 2 : Les « moyens extrêmes » : « produit des moyens = produit des extrêmes » 16*
   - *Astuce 3 : Le triangle magique 16*
   - *Astuce 4 : Le « Passer de l'autre côté » 17*
2. PROPOSITIONS DE RAISONNEMENTS POUR ISOLER: 17
   - *Raisonnement 1 : l'analogie 2-3-6 ..... 17*
   - *Raisonnement 2 : opérations réciproques (ou « contraires ») et signe égal 17*
3. VERS LE SUPERIEUR : OPERATION, ENSEMBLE ET ELEMENT NEUTRE 17

IV. LA PROPORTIONNALITE 18
1. L'ASTUCE POUR LA PROPORTIONNALITE : LE PRODUIT EN CROIX (OU PRODUIT EN ALPHA) 18
2. LES RAISONNEMENTS EN PROPORTIONNALITE: 19
   - *Propriété multiplicative (ou propriété d'homogénéité): 19*
   - *Règle de trois et passage à l'unité (propriété multiplicative): 19*
   - *L'égalité des rapports 19*
   - *Propriété additive et combinaisons linéaires : 20*
   - *La représentation graphique 20*
   - *La proportionnalité dans le Primaire et le Secondaire 20*
3. PRODUIT EN CROIX ET LINEARITE 20
   - *Le produit en croix et les fractions 20*
   - *Produit en croix et tableau de proportionnalité 21*
   - *Produit en croix, colinéarité, et produit vectoriel 21*

V. LES ASTUCES, RAISONNEMENTS, AUTOMATISATIONS : L'ENJEU DU TEMPS 22

VI. PREPARATION DE L'ACTIVITE D'ENTRE JOURNEES 22

VII. BIBLIOGRAPHIE 24

VIII. ANNEXES 25

1. ANNEXE 1 : EVOLUTIONS DES PROGRAMMES ET DE LEURS CONTENUS 25
2. ANNEXE 2 : ENONCES DE TRAVAIL AVEC LES COLLEGUES STAGIAIRES 26
3. ANNEXE 3 : ENONCES TYPIQUES DE COLLEGE ET LEURS CORRIGES 28
4. ANNEXE 4 : ENONCES DE LYCEE 30
5. ANNEXE 5 : ÉVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES EN PRIMAIRE 31
6. ANNEXE 6 : EXTRAITS D'UN DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT DU PRIMAIRE AINSI QUE D'UN LIVRE DU PROFESSEUR. 33
7. ANNEXE 7 : EXERCICES D'ENTRAINEMENT D'ISOLEMENT DE VARIABLE 34
8. ANNEXE 8 : COPIES ET PROPORTIONNALITE 37

Lorsqu'on demande à des enseignants du Secondaire ou du Supérieur quelles difficultés rencontrent leurs élèves, on observe qu'au-delà du constat « les élèves ne savent plus calculer », leurs réponses s'orientent rapidement autour :

- des applications numériques,
- de l'isolement de variables,
- de la maîtrise de la proportionnalité.

Dans ce document, nous proposerons tout d'abord un contexte d'analyse, à partir duquel nous préciserons les enjeux qui de notre point de vue peuvent sous-tendre les difficultés des élèves ; puis nous aborderons spécifiquement un par un, chacun des trois items ci-dessus.

I. Difficultés des élèves en calculs : contexte et enjeux

1. L'évolution actuelle des programmes en sciences

Les programmes SPC et mathématiques des élèves en 2015 ont beaucoup évolué depuis les programmes qu'ont connus leurs enseignants. Et si les enseignants sont à jour concernant les programmes de leur propre discipline, ils ne le sont pas forcément au sujet de l'autre discipline, tant sur les contenus que sur l'état d'esprit. Deux tableaux en *Annexe 1* synthétisent les évolutions des contenus calculatoires en mathématiques et en sciences physiques et chimiques.

L'état d'esprit des programmes a lui aussi beaucoup évolué tant en physique et chimie qu'en mathématiques, et ce, de manière à laisser plus de place aux questionnements, aux initiatives et aux raisonnements des élèves. Les programmes invitent aussi les deux disciplines à contextualiser les questionnements sur des situations « réelles » et complexes. L'exemple du brevet illustre ces évolutions (voir la pièce jointe n°1 : énoncé du brevet des collèges de juin 2003 et énoncé du brevet des collèges de juin 2014) : les calculs ne sont manifestement plus au cœur des attentes, mais attention, la nouvelle épreuve du brevet n'est pas pour autant plus simple, au contraire. On observe la même tendance dans les programmes de physique et chimie : dans les nouvelles épreuves d'Evaluation des Compétences Expérimentales, on demande souvent aux élèves de proposer un protocole en vue de modéliser une situation, ou de résoudre un problème ; l'institution invite aussi les enseignants à travailler dès la seconde sur des « résolutions de problèmes » (voir pièce jointe n°2 : « résolution de problème de la seconde à la terminale S »). Les attentes calculatoires sont donc moins importantes que dans les programmes précédents, mais les nouveaux programmes mettent le raisonnement et la démarche de résolution au premier plan.

On constate aussi que les enseignants sont très soucieux de la réussite de leurs élèves dans le Supérieur, tout particulièrement concernant leur niveau en mathématiques. Dans une mise en perspective des programmes du Secondaire vers le Supérieur, on peut noter tout d'abord que la problématique universitaire est très différente des problématiques des filières sélectives (IUT ; BTS ; CPGE). En effet, pour ces dernières, la continuité des contenus est assurée par les rédacteurs de l'Éducation Nationale. Ce n'est pas le cas pour les Universités, qui d'une part disposent d'une très grande autonomie pour leurs contenus, et d'autre part, sont soumises à des contraintes spécifiques. De ce point de vue, travailler avec les élèves à l'acquisition du programme du Secondaire, c'est *de facto*, les préparer aux programmes des filières sélectives, conçus dans la continuité. Par contre, les enseignants du Secondaire ne peuvent pas « s'adapter » aux attentes et aux *prérequis* de l'Université qui pourront varier d'un établissement à l'autre.

Au-delà du constat unanime des difficultés des élèves en calcul, on observe donc une double influence des nouveaux programmes sur le niveau apparent des élèves:

1. les nouveaux programmes laissent objectivement plus de place à l'initiative, au raisonnement et au questionnement pour les élèves, ce qui est positif en soi ; mais en contrepartie, il y a donc moins de temps à l'entrainement à la technicité calculatoire ;

2. Un enseignant du Secondaire ou du Supérieur, suite aux nombreux changements, peut être amené à prendre pour des lacunes des notions qui en réalité, n'ont pas été abordées par les élèves au cours de leur cursus ou que les élèves ont abordé de manière beaucoup moins approfondie que celle que l'enseignant a connu lors de sa scolarité. Ce « biais aggravant » est particulièrement valable concernant les disciplines qu'on n'enseigne pas et pour la liaison Lycée-Université.

2. Les effets de culture disciplinaire : « l'addition mise au vote »

Lors des deux stages, une activité très courte a été proposée aux collègues en début de séance: « l'addition mise au vote ».

L'énoncé suivant est distribué à chaque collègue stagiaire :

« *3 types de rédaction qu'on retrouve dans les livres ou qui sont utilisées par les enseignants :*

L = 3 cm + 4 cm = 7 cm	*Proposition 1*
L = 3 + 4 = 7 cm	*Proposition 2*
L = 3+ 4 = 7 donc L = 7 cm	*Proposition 3*

Classez de 1 à 3 les propositions ci-dessus, de celle qui vous semble la plus préférable (« 1 ») à la moins préférable (« 3 »).

Vous êtes enseignant de : Mathématiques / SPC »

Lors des deux stages, des résultats similaires ont été obtenus :

- chez les collègues de mathématiques, la proposition 3 est très majoritairement préférée ;
- chez les collègues de physique et chimie, la proposition 2 est très majoritairement préférée ;
- la proposition 1 arrive dernière, tant chez les collègues de maths que ceux de physique et chimie.

La proposition 1 est pourtant l'écriture recommandée en École Primaire et elle est au sens strict la seule correcte car l'homogénéité est respectée tout au long du calcul : *longueur = longueur + longueur = longueur* ; tandis que dans les deux autres, nous avons *longueur = nombre + nombre = longueur*.

Un débat a aussi émergé concernant la disposition du signe égal dans les calculs :
Faut-il écrire le signe égal « à la suite, en ligne » (comme dans les trois propositions ci-dessus) ou au contraire « en colonne » ? Les deux rédactions étant correctes, écrire à la suite permet d'introduire une certaine continuité de raisonnement ; écrire en colonne est incontournable lorsque qu'on résout une équation. Cependant la question ne faisait pas unanimité chez les collègues.

Au final, on constate que sur une simple addition, on observe déjà :

- des pratiques intra culturelles fortes (rédaction « à la mathématicienne » *versus* à la « physicienne ») ;
- une pratique inter culturelle marquée : l'absence des unités dans le calcul, placées uniquement à la fin ;
- des incohérences conceptuelles sur l'homogénéité des expressions (propositions 2 et 3) et sur le statut du signe égal (en ligne ou en colonne).

Si les effets culturels s'expriment sur l'opération la plus élémentaire des mathématiques, on peut facilement imaginer qu'ils vont aussi se manifester sous beaucoup d'autres formes dans les classes, avec le risque de peut-être perdre les élèves.

Ces effets culturels ont aussi un contexte historique que nous présenterons par la suite.

Dans la suite du document, nous nous concentrerons sur les trois principales difficultés calculatoires évoquées par les enseignants du Secondaire et du Supérieur :

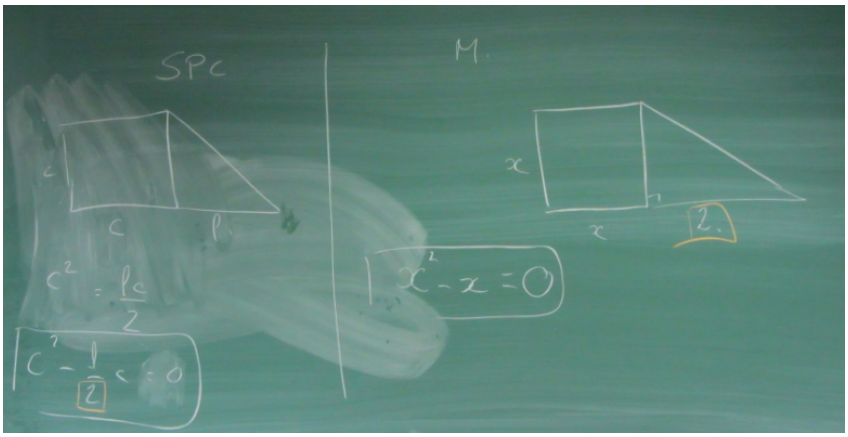
- les applications numériques,
- l'isolement de variables,
- la maîtrise de la proportionnalité.

Des mises en perspective culturelle (au sens disciplinaire), historique voire épistémologique sous-tendront les analyses.

II. Homogénéité, grandeurs, nombres et mesures

1. Discussion: « mise en équation, rédaction et homogénéité »

Lors des deux stages, le problème suivant a été présenté aux stagiaires :



Un triangle rectangle et un carré sont juxtaposés ; on cherche la longueur du côté pour laquelle les aires des deux figures sont égales, sachant que la base du triangle vaut 2 unités de longueur - ce que le enseignants de mathématiques représentent souvent au tableau simplement « 2 » sous la longueur concernée. Il faut pour cela résoudre une équation : à gauche sur la photo ci-dessus, la rédaction typique de l'équation dans un cours de physique et chimie : $c^2 - \frac{L}{2}.c = 0$; à droite la rédaction typique de l'équation dans un cours de mathématiques : $x^2 - x = 0$.

Au premier abord, un enseignant de physique et chimie, dira que l'équation « à la mathématicienne » $x^2 - x = 0$ est fausse pour des raisons d'homogénéité : il va considérer x comme une longueur alors que c'est bien, dans le contexte de l'enseignent de mathématique, un nombre.

Dans la rédaction « à la physicienne » $c^2 - \frac{L}{2}.c = 0$, les objets manipulés sont au contraire des grandeurs et l'homogénéité est explicite.

On peut noter sur la photo ci-dessus le statut très différent du « 2 » pour la longueur dans le cas « à la mathématicienne » et du « 2 » pour signifier la moitié, dans le cas « à la physicienne ».

Le regard des collègues de physique et chimie se situe clairement dans le cadre des grandeurs, tandis que celui des collègues de mathématiques dans celui du cadre numérique (en vue de résoudre une équation du second degré).

L'enjeux n'est pas tant d'opposer ces deux rédactions que de comprendre comment les associer. Cette mise en relation peut être assurée par ce qu'on peut considérer comme une étape de modélisation à part entière : le passage du cadre des grandeurs au cadre numérique en posant c = x cm et L = 2 cm, x étant un nombre. À partir de la représentation « à la physicienne » on obtient alors celle « à la mathématicienne » : le problème est alors « adimensionné », sans unités. Une fois les solutions obtenues, il est ensuite nécessaire de les replacer dans le contexte du problème « physique » pour en évaluer la pertinence.

Cette étape de modélisation d'une équation de physique ou de chimie (relation entre des grandeurs) à une équation mathématique (relation entre des nombres) est présente dans toute résolution numérique d'un problème de physique et de chimie dans le Supérieur mais aussi en Recherche. Former les élèves au passage du cadre des grandeurs au cadre numérique, c'est aussi former les élèves au Supérieur et aux résolutions numériques d'équation.

2. Activité « énoncés de mathématiques et unités »

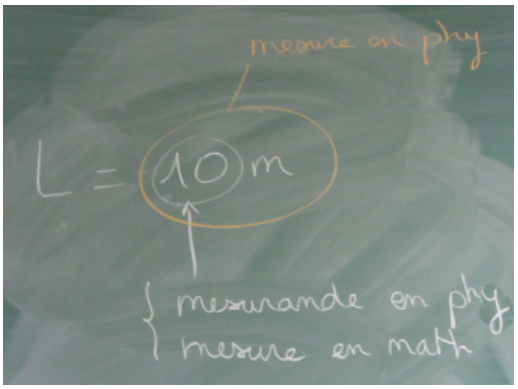
Trois énoncés d'exercices ont été distribués aux stagiaires participant au stage *Pour renouer avec le calcul* (*Annexe 2*):

- Exercice 1 : distance de freinage ;
- Exercice 2 : aire, longueur et carreaux ;
- Exercice 3 : optimisation et grillage.

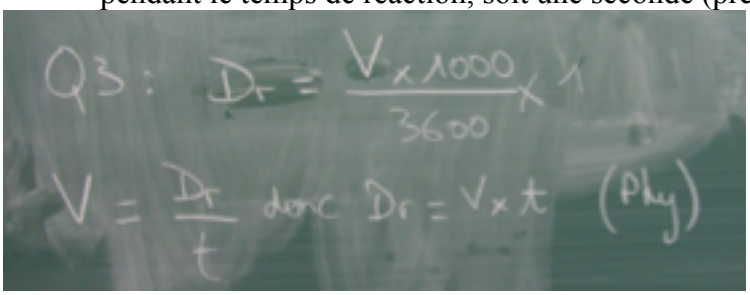
Les stagiaires étaient organisés en 4 groupes de 4, mixtes SPC-Maths, lycée-collège.

Points remarquables de l'activité et des discussions :

- polysémie : En sciences de la nature (SVT, SPC), le mot « *mesure* » désigne le nombre *et* son unité pris ensemble comme un tout indissociable ; la *mesure* du physicien est le résultat d'un *mesurage*, c'est-à-dire d'un ensemble d'opérations faisant intervenir un ou plusieurs instruments de mesure. En mathématiques, le mot « *mesure* » désigne pour simplifier « le *nombre devant* l'unité », c'est-à-dire le nombre de fois l'unité, alors qu'en métrologie, le nombre devant l'unité est appelé *mesurande*. Cette ambiguïté est plus importante qu'il n'y paraît, ainsi l'un des cinq thèmes autour duquel s'articule le programme de mathématiques au Collège s'intitule « Grandeurs et Mesures » : l'enseignant de mathématiques ne lira pas ce titre de la même manière que l'enseignant de physique et chimie. Cette polysémie, est aussi source de réelles difficultés lorsque deux enseignants, l'un de mathématiques, l'autre de sciences physiques et chimiques, cherchent à discuter de ce sujet.



- Dans l'exercice 1, on donne la formule suivante pour la distance parcourue Dr, à la vitesse V, pendant le temps de réaction, soit une seconde (première ligne):



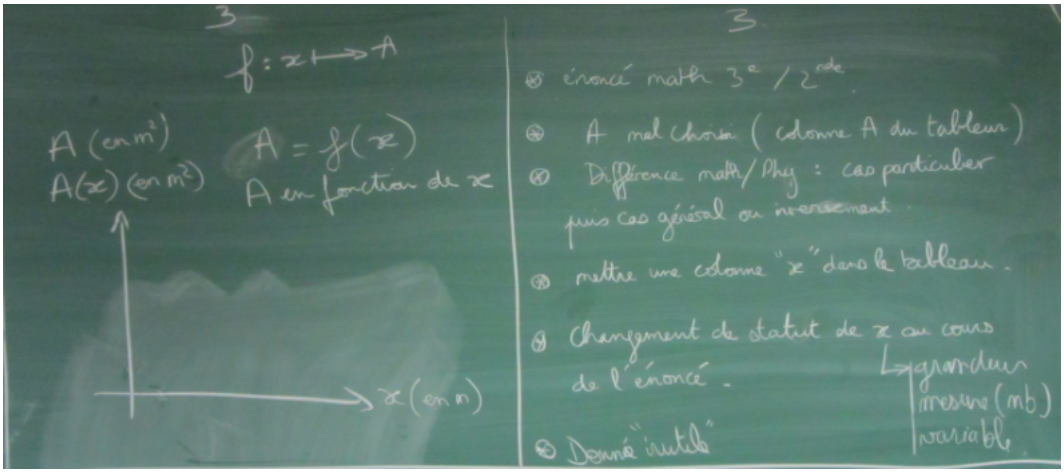
La formule ne pose pas de problème particulier à la plupart des collègues de mathématiques : il s'agit bien de nombres car les unités sont précisées dans l'énoncé ; on y voit une conversion de la vitesse des km/h en m/s et une multiplication par 1, qui correspond à la multiplication de la vitesse convertie, par une durée de 1 s. Du point de vue des collègues de physique et chimie, pour qui les symboles désignent *toujours* des grandeurs, la formule n'est pas acceptable à cause de l'homogénéité (distance = vitesse). Ils considèrent aussi que le fait de désigner les mesurandes par des symboles rend l'expression de la formule dépendante du choix des unités, lui faisant alors perdre son caractère général. Pour les enseignants de physique et chimie, l'expression de la première ligne est quasiment inadmissible.

- Dans l'exercice 3, une même notation x recouvre selon les étapes de l'exercice plusieurs significations mathématiques différentes : grandeur ou variable numérique. On constate de nombreux changements *implicites* entre les cadres du numérique, de l'algébrique et celui des grandeurs.

- La notation A(x) sur l'axe des ordonnées (répandue en sciences) a questionné les participants : en effet, rigoureusement, A, qui est définie dans l'énoncé comme une grandeur (une aire), devient donc une fonction par cette notation. Ce type de rédaction peut conduire à renforcer la confusion entre image et fonction auprès des élèves. Cet aspect didactique très important pour les enseignants de mathématiques, ne l'est pas vraiment pour les collègues de physique et chimie, qui tendent spontanément à le renforcer négativement.

- Des enseignants de physique et chimie ont proposé la notation très répandue dans leur discipline « x(m) » pour l'axe horizontal, ce qui a gêné des enseignants de mathématiques qui préféraient « x (en m) » afin qu'il n'y ait pas de confusion avec la notation fonctionnelle du type f(x). Pour les enseignants de physique et chimie, cette confusion n'a pas lieu d'être car ils n'utilisent jamais la notation f(x) ; cela peut cependant gêner des élèves. Des enseignants de physique et chimie ont aussi écrit « A = f(x) » pour titrer le graphique, ce qui de nouveau a gêné les enseignants de mathématiques car aucune fonction f n'avait été définie. En fait, la notation « A = f(x) » signifie pour les enseignants de physique littéralement « A en fonction de x ». En pratique, les enseignants de physique et chimie ne définissent jamais de fonctions numériques, même s'ils utilisent leurs propriétés.

Retours exo 3 :



Les problématiques identifiées ci-dessus sont très répandues dans les exercices de mathématiques du Secondaire. On trouvera en *Annexes 3 et 4* des exemples typiques d'énoncés en Collège et en Lycée.

3. Les applications numériques en physique et chimie:

Les applications numériques jouent en physique et chimie un rôle central.
Voici un exemple de rédaction typique:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{12.10^{-3}}{8.10^{-6}} = 1{,}5.10^{3} m.s^{-1}$$

On retrouve le format classique suivant : *formule littérale = formule avec valeurs sans unités = résultat avec unités* ; le tout avec des signes égal mis à la suite, en ligne. Ce format est le même que celui de la proposition 2 préférée par les collègues de physique et chimie lors de l'activité « l'addition mise au vote ».

On peut noter que dans le contexte d'un enseignement de physique et chimie, v, d et t sont des grandeurs ; pourtant, on les égalise à des nombres lors du passage aux valeurs. Ces mêmes nombres sont à nouveau égalisés à une grandeur pour le résultat final. Cette rédaction est donc de la forme : *grandeur = nombre = grandeur*, ce qui au sens strict est incorrect.

Tous les enseignants de physique et chimie ont à juste titre une exigence élevée concernant la présence et la pertinence des unités pour le résultat final (l'élève perd des points lorsqu'il ne met pas les unités au résultat ou si elles sont fausses) ; il y a pourtant un problème d'homogénéité au cours de la rédaction des applications numériques typiques *juste avant* le résultat.

Un collègue a depuis le stage testé les unités dans les calculs avec ses élèves de seconde, ce qui a été bien reçu par ces derniers. Il a cependant exprimé sa réticence à utiliser les unités dans les calculs avec ses élèves de première S, de crainte qu'ils puissent être sanctionnés par le correcteur du bac.

4. Unité, calculs et grandeurs : Contexte épistémologique

Avant les années 70, on enseignait en cours de mathématiques les grandeurs *puis* les ensembles de nombres. Le travail se faisait donc au préalable sur des grandeurs. (*Annexe 5*)
Au cours des années 70 le point de vue a profondément changé : les nombres sont traités comme des objets mathématiques pour eux-mêmes, indépendamment des grandeurs. Plusieurs facteurs ont contribué à cette rupture dans l'enseignement entre les grandeurs et le numérique pour se concentrer sur l'étude d'objets "mathématiquement purs" :

- L'évolution des maths (Bourbaki et les structures, Lebesgue et autres sur la mesure)
- Les évolutions technologiques (l'École n'a plus besoin d'enseigner l'utilisation d'une balance de Robervall pour mesurer des masses).
- L'augmentation de la distance entre les maths savantes et les pratiques de la vie courante.

Aujourd'hui, en classe de mathématiques, on pratique de manière implicite des changements de cadres fréquents entre celui des grandeurs et celui des nombres. On peut aussi noter que dans les programmes, la partie « Grandeurs et Mesures », présente à l'École Primaire et au Collège, disparait au Lycée, en s'effaçant devant l'étude des fonctions.

5. Grandeurs, mesures et nombres dans le Primaire et dans le Secondaire

- **Dans le Primaire**

Les premières activités visent à construire chez les élèves la notion de grandeur (*Annexe 6*). Cela passe en particulier par des comparaisons et des classements entre grandeurs. On peut noter que *mesurer, c'est comparer quantitativement* une grandeur à une grandeur de même nature prise comme référence (l'unité) : dire L = 3 cm signifie « la longueur L est 3 fois plus grande que la longueur 1 cm ».

Le document d'accompagnement de Primaire invite explicitement à mettre en opération des grandeurs de même nature exprimées dans des unités différentes : 2 h = 120 min ; 3 kg + 500 g = 3,5 kg = 3500 g.

A l'École Primaire, grandeurs et mesures d'une part, et connaissance des nombres d'autre part, sont deux parties distinctes du programme.

- **Dans le Secondaire**

Document de référence : document d'accompagnement de *mathématiques* « Grandeurs et Mesures » du collège.

Le document légitime l'écriture des unités dans les calculs et présente les tenants et les aboutissants de cette approche. Ce document est souvent méconnu des enseignants de sciences physiques et chimiques du collège et du lycée.

On peut remarquer que les programmes de lycée n'ont plus de partie « grandeur et mesure » ; on passe directement aux fonctions.

6. Les unités au service du calcul en SPC

Les bénéfices à utiliser les unités dans les calculs en physique et chimie sont multiples.

- **Pour donner du sens au « par », au « / » et aux puissances d'unités**

Il est très courant en sciences d'associer le mot « par » au symbole slash « / » comme dans l'expression « 30 kilomètre par heure » qui est retranscrite en langage mathématique comme « 30 km / h ». Puis dès la seconde, il est courant de passer en classe ou dans les livres scolaires du slash à la puissance de grandeur : « 30 $km.h^{-1}$ ». Ce changement d'écriture est souvent présenté comme un simple changement de notation qu'il s'agit très souvent d'admettre. Il est pourtant fréquent que les élèves soient perturbés par l'utilisation de la notation du – 1 en exposant de l'unité.

La rédaction des calculs avec les unités permet de donner du sens aux changements d'écritures évoqués ci-dessus. En effet, la rédaction typique en SPC : $v = \frac{d}{t} = \frac{120}{2} = 60 km.h^{-1}$

devient : $v = \frac{d}{t} = \frac{120\ km}{2\ h} = 60\ \frac{km}{h} = 60\ km.h^{-1}$

Dans l'expression avec unité, on réalise que le « par » signifie mathématiquement « divisé par » et que le slash est en fait une barre de division. Ensuite, de même que $\frac{1}{10} = 10^{-1}$, on peut aussi écrire $\frac{1}{h} = h^{-1}$; les puissances nombres se généralisent aux grandeurs.

Au final, mettre les unités dans les calculs contribue à redonner du sens aux mots et aux notations courantes associés aux calculs.

- **Pour trouver une formule**

Connaissant les unités, il est très facile de retrouver les formules associées par un raisonnement sur les grandeurs concernées. Ex : km/h pour la vitesse, signifie en fait $\frac{km}{h}$ soit $\frac{longueur}{durée}$ et donc $v = \frac{d}{t}$

- **Pour convertir**

Ex : 1 h = 60 min = 60 × 60 s = 3 600 s

$$v = 60\,\frac{km}{h} = 60\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 16{,}7\,m.s^{-1}$$

- **Pour vérifier un calcul (analyse dimensionnelle)**

Un autre exemple, plus élaboré de niveau TS: on sent bien que lors d'un virage, l'accélération augmente avec la vitesse et diminue avec le rayon du virage ce qui invite à poser $a = \frac{v}{R}$. Mais l'application numérique avec les unités conduit à $a = \frac{v}{R} = \frac{20\,m.s^{-1}}{2\,m} = 10\,s^{-1}$, ce qui n'est pas l'unité d'une accélération. D'où la nécessité de repenser la formule : $a = \frac{v^2}{R} = \frac{(20\,m.s^{-1})^2}{2\,m} = \frac{400\,m^2.s^{-2}}{2\,m} = 200\,m.s^{-2}$

On peut noter que si l'analyse dimensionnelle n'est bien sûr pas nouvelle dans les classes, elle est traditionnellement une étape distincte, séparée de l'application numérique, et réalisée à part et sur demande dans les énoncés. En écrivant les unités dans les calculs, l'analyse dimensionnelle est réalisée *en direct et au sein du calcul* lui-même, ce qui participe à donner du sens au calcul.

Plusieurs remarques importantes ont émergées lors des discussions avec les collègues :

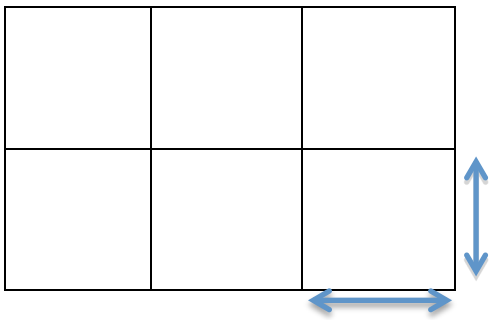
- **Signification du signe égal ?**

Une activité, « Alex = 56 », mise en œuvre avec des élèves de seconde a été évoquée avec les collègues : « un médecin écrit sur son calepin « Alex = 56 » ; qu'a-t-il voulu dire ? »
Les élèves répondent tous : « il manque l'unité ! C'est Alex = 56 kg qu'il aurait fallu écrire ! »
S'en suit une réflexion avec les élèves sur la signification du signe égal et les notions d'*objet* et de *grandeurs associées* : à un objet (Alex) sont associées plusieurs grandeurs (le poids, la taille, l'âge, …) ; le signe égal veut dire « la même chose que » (c'est une première définition).

- **Unité dans les calculs : une nouvelle astuce ?**

Un collègue de physique et chimie a exprimé son scepticisme quant au fait de mettre les unités dans les calculs notamment concernant la rédaction suivante:
A = 3 cm × 2 cm = 3 × 2 × cm × cm = 6 cm^2
Le collègue posait la question de savoir si finalement, cette rédaction n'était pas elle même une astuce.

Le schéma suivant a donc été proposé par les formateurs:



La rédaction suivante correspond à un développement de la précédente :

$A = 3\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 3 \times 1\text{ cm} \times 2 \times 1\text{ cm} = 3 \times 2 \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} = 6 \times 1\text{ cm}^2 = 6\text{ cm}^2$

On constate la correspondance exacte entre la rédaction ci-dessus et le schéma : cette rédaction n'est donc pas une astuce car elle rend compte d'un raisonnement rigoureux faisant appel à des notions fondamentales (géométrie, associativité).

On peut noter cependant que le passage 3 cm = 3 × 1 cm, bien que fondamental, pose parfois des difficultés aux élèves.

Mettre les unités dans les calculs présente donc en physique et chimie un certain nombre d'avantages. Mais attention, cette approche fait émerger aussi un certain nombre de questions nouvelles qui peuvent être vécues par les enseignants comme des difficultés supplémentaires notamment concernant les unités du Système International.

7. Unités en SPC, constantes fondamentales et Système International (SI)

Le Bureau International des Poids et Mesures a posé un ensemble de sept unités de grandeurs (« unités de base ») parfaitement définies métrologiquement : *kilogramme* pour les masses, *mètre* pour les longueurs, *seconde* pour les durées, *kelvin* pour les températures, *mole* pour les quantités de matière, *ampère* pour les intensités électriques et *candela* pour les intensités lumineuses. À partir de ces unités sont définies toutes autres grandeurs et unités (« unités dérivées »). Un rôle majeur des unités du SI est d'avoir permis de donner aux constantes fondamentales une valeur numérique unique et consensuelle pour l'ensemble de la communauté scientifique internationale.

- **Choix des unités : une question de contextes**

Il est courant de voir des enseignants ou des ouvrages passer systématiquement par les unités de base du SI, les présentant comme incontournables. Ce n'est pourtant pas le cas : en effet, les « bonnes unités » dépendent avant tout du contexte. Ainsi dans l'étude des migrations de cellules, il est courant d'exprimer les vitesses en micromètre par seconde ; pour les vitesses de la vie de tous les jours, on va privilégier le kilomètre par heure ; tandis qu'en physique des particules et hautes énergies, la vitesse sera exprimée en prenant comme unité la vitesse de la lumière. Dans chacun de ces contextes, l'unité utilisée est bien la « meilleure », car c'est celle qui est adaptée au phénomène étudié.

En présence d'une constante fondamentale, les unités à utiliser dans sont cependant contraintes par celles de la constante : ainsi par exemple, lorsque la constante gravitationnelle ($m^3.kg^{-1}.s^{-2}$) intervient, il est *nécessaire* de convertir toutes les durées en secondes et les longueurs en mètre.

En l'absence de constante fondamentale, le choix des unités est très libre (ex : calculs liés à la diffraction de la lumière), mais pas totalement : certaines unités particulières peuvent elles aussi impliquer des contraintes sur les unités à utiliser:

- Dans les relations $E = m.c^2$ (relation masse-énergie), $E = \frac{1}{2}.m.v^2$ (énergie cinétique) ou $E = m.g.h$ (énergie potentielle de pesanteur) il faudra *nécessairement* travailler en kilogramme (kg), mètre (m) et seconde (s) pour obtenir un résultat en joule car 1 J = 1 $kg.m^2.s^{-2}$; cette relation entre unités se retrouve facilement à partir de chacune des trois relations ci-dessus ;

- Dans la relation $F = m.a$ (principe fondamental de la dynamique), on est aussi *obligé* de travailler en kilogramme (kg), mètre (m) et seconde (s) si la force est en newton car 1 N = 1 $kg.m.s^{-2}$; cette relation entre unités se retrouve facilement à partir du principe fondamental de la dynamique ou encore de la relation entre poids et accélération de pesanteur.

On peut noter que les constantes fondamentales elles-mêmes, bien que définies métrologiquement *à partir* des unités du SI, ne sont pas toujours exprimées *avec* les unités du SI, et que là encore, les pratiques répondent avant tout à des besoins de fonctionnalité comme l'illustrent les exemples suivants:

- **<u>Une constante fondamentale, mais plusieurs choix d'unités</u>**

La constante de Planck est très souvent exprimée en joules fois seconde (J.s) de manière à simplifier l'utilisation de la formule $E = h.\nu$ qui fait intervenir une énergie. Attention cependant, dans les nouveaux programmes de physique et chimie de terminale S, h intervient aussi dans la formule de la quantité de mouvement $p = \frac{h}{\lambda}$. Le choix du joule pour les unités de h est alors moins pratique que celui des unités SI ($m^2.kg.s^{-1}$) avec lequel apparaitra plus clairement l'unité de la quantité de mouvement.

La constante électrostatique de la formule de Coulomb n'est, elle, *jamais* exprimée avec l'ampère – unité de base du SI - mais bien avec le coulomb, unité de la charge électrique. Dans les ouvrages du secondaire, on observe aussi que cette constante est souvent exprimée à partir du newton ($N.m^2.C^{-2}$) de manière à simplifier l'utilisation de la formule de la force électrostatique qui sera exprimée en newton.

L**a constante gravitationnelle** est, tantôt exprimée avec le newton ($N.m^2.kg^{-2}$), ce qui est très pratique pour les calculs de force gravitationnelle ; tantôt avec les unités du SI ($m^3.kg^{-1}.s^{-2}$), ce qui est plus pratique pour les calculs intervenants en mécanique céleste dans lesquels il ne s'agit pas de calculer une force (ex : pour la 3e loi de Kepler).

Enfin un dernier exemple typique est celui de g, **l'accélération de pesanteur** dont l'unité est comme son nom l'indique celle d'une accélération ($m.s^{-2}$) mais qui est aussi souvent exprimée en newton par kilogramme ($N.kg^{-1}$) pour faciliter l'utilisation de la formule P = mg où P est la force gravitationnelle au niveau du sol.

En l'absence d'unité dans les calculs, les difficultés ci-dessus peuvent être facilement éludées, notamment en posant « qu'on raisonne pour simplifier en unité SI ». Avec l'utilisation des unités dans les calculs, il est devient incontournable de signaler aux élèves qu'un newton ou une joule peuvent être exprimés en mètre, kilogramme et seconde.

Au final,

- **Les bonnes unités à choisir sont celles pertinentes compte tenu des échelles du phénomène considéré ; cependant, certaines unités ainsi que les constantes fondamentales *contraignent* les unités à utiliser lors de l'application numérique ;**
- **Pour les calculs impliquant des grandeurs telles que force ou énergie, la correspondance entre leurs unités courantes (resp. newton, joule) et les unités mètre, kilogramme et seconde, n'est pas simple pour les élèves et varie selon les contextes. Cette question, souvent éludée en classe, peut valoir la peine d'être envisagée comme un enjeu pédagogique à part entière.**

8. L'homogénéité au service des mathématiques et du Supérieur

Le concept d'homogénéité - central en sciences physiques et chimiques – est souvent considéré comme inutile pour les mathématiques. Pourtant, il n'en est rien.

- **L'homogénéité au service des formules du cercle**

Les élèves sont souvent incapable d'identifier les formules $2\pi R$, πR^2 et $\frac{4}{3}\pi R^3$ au périmètre du cercle, à l'aire du disque et au volume de la sphère.
Un raisonnement sur les grandeurs permet pourtant très efficacement d'identifier la bonne formule.

- **L'homogénéité pour mieux comprendre la notation intégrale**

Dans une intégrale, le dx est souvent considéré par les élèves et les enseignants de mathématiques comme un simple élément d'une notation à respecter. L'importance de la notation différentielle (dx) va pourtant bien au-delà, comme l'illustre le calcul d'un longueur L par intégration de la vitesse au cours du temps :

Dans $L = \int v.dt$, en l'absence du dt, on égalise une longueur avec une somme continue de vitesses, ce qui n'a pas de sens. Le raisonnement par homogénéité sous-tend la notation intégrale.

- **L'homogénéité au service de l'algèbre matricielle et tensorielle**

En enseignement de spécialité mathématiques (TS), mais aussi dans le Supérieur, les élèves peuvent être amenés à résoudre une équation matricielle de la forme $3A - A^2 = I$ avec A une matrice et I la matrice identité.
Il est très courant que les élèves essaient de factoriser la matrice A pour obtenir (3-A)A = I. Un raisonnement par homogénéité pourrait les aider à remarquer que soustraire une matrice – ici A - à un nombre – ici 3 – n'a pas de sens, et pourrait les amener à prendre conscience de cette nouvelle « unité » - la matrice identité – adaptée au type d'objets avec lequel ils travaillent.

Au final, le concept d'homogénéité est bel est bien un concept *transdisciplinaire* dont la portée conceptuelle et pédagogique s'étend et se décline du Primaire au Supérieur. La prise de conscience individuelle et collective de son importance nous apparaît comme un levier pour aider nos élèves, tant sur le plan conceptuel que technique, et pour redonner du sens aux calculs.

III. L'inversion de formule

La deuxième attente souvent exprimée par les enseignants du Secondaire et du Supérieur porte sur l'inversion de formule. Ce sujet introduit une nouvelle problématique : le statut et les effets des astuces en contexte d'enseignement.
Nous qualifierons par la suite d' « astuce » toute procédure type, sans référence aux concepts mathématiques et à leurs propriétés.

Dans un premier temps, nous présenterons plusieurs astuces très répandues chez les élèves et les enseignants pour isoler un terme dans une formule ; puis nous proposerons une approche permettant de redonner du sens aux mathématiques en question.

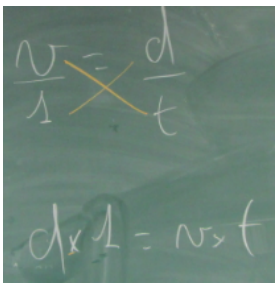
1. Astuces pour isoler une variable

Cas de la formule de la vitesse.

« $v = \frac{d}{t}$; comment isoler d ? »

- **Astuce 1 : le produit en croix**

On modifie légèrement l'expression de l'équation en explicitant une division par 1, puis on applique le « produit en croix » :



Partant de $\frac{v}{1} = \frac{d}{t}$, le produit en croix consiste à multiplier les diagonales de la croix ; on trouve alors : $v \times t = d \times 1$.

On peut noter qu'en partant du produit en croix $v \times t = d \times 1$ on peut trouver une autre égalité de rapports en échangeant les rôles de v et t dans le produit en croix : $\frac{t}{1} = \frac{d}{v}$

Cette astuce est relativement répandue.

Travers de l'astuce :

- Souvent les élèves ne savent pas pourquoi le produit en croix donne le bon résultat;
- partant de l'expression $v \times t = d \times 1$, les élèves ne parviennent pas à isoler t.

L'analyse du produit en croix ou plutôt *des* produits en croix est développée dans la suite du document.

- **Astuce 2 : Les « moyens extrêmes » : « produit des moyens = produit des extrêmes »**

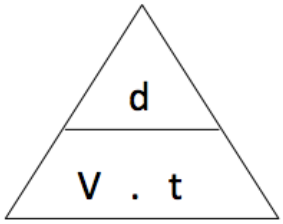
On écrit l'expression de l'équation sous la forme suivante : $v/1 = d/t$; v et t sont les « extrêmes » (ou extrémités), 1 et d sont les « moyens » ; l'astuce conduit alors à $v \times t = d \times 1$.

Cette astuce a été très répandue à une certaine époque. C'est formellement la même procédure que le produit en croix.

- **Astuce 3 : Le triangle magique**

Pour utiliser cette astuce, il faut classer par ordre alphabétique, d, t et v puis les placer dans un triangle en commençant par le haut, dans le sens des aiguilles d'une montre :

Ensuite, il suffit d'appliquer la règle : « ce qu'on cache est égal à ce qu'on voit », en prenant comme barre de division le segment dans le triangle.



Cette astuce – la plus originale - est heureusement la moins répandue.

- **Astuce 4 : Le « Passer de l'autre côté »**

L'astuce consiste à *changer* une division en une multiplication quand on passe le terme de l'autre côté du signe égal: dans l'exemple, « on passe t de l'autre côté *donc* d = v . t »

Cette astuce occupe un statut particulier car elle est de loin la plus répandue des astuces pour isoler, mais aussi car elle n'est sincèrement pas considérée comme une astuce pour qui a compris ce qu'il fait. Cependant, lorsque la procédure est dénuée de sens, elle a bien sûr ses travers :
2x = 3 devient x = 3 – 2 ou encore x = 3 / -2.

2. Propositions de raisonnements pour isoler:

- **Raisonnement 1 : l'analogie 2-3-6**

Les élèves connaissent tous les relations de multiplication et de division entre les nombres 2, 3 et 6 :
6 = 2 × 3 ; 2 = 6 / 3 et 3 = 6 / 2
Dans ce raisonnement par analogie, on associe par exemple v à 2, d à 6 et t à 3 ; on retrouve alors les formules reliant v, d et t grâce aux opérations ci-dessus. Ce raisonnement par analogie, bien que rigoureux, est peu abstrait. Il ne peut être envisagé que comme une première étape dans l'apprentissage de l'utilisation des équations.

- **Raisonnement 2 : opérations réciproques (ou « contraires ») et signe égal**

Dans cette approche, on réinvestit les notions fondamentales des opérations : opérations réciproques et signification du signe égal (« la même chose que ») :

Dans l'exemple « $v = \frac{d}{t}$; comment isoler d ? », pour *compenser* le diviser par t, on va multiplier par t. Puis, *par définition du signe égal*, ce qu'on applique d'un côté du signe égal doit aussi être appliqué de l'autre côté aussi :

$v \times t = \frac{d}{t} \times t$ soit $v \times t = d$

L'acquisition et la répétition de l'isolement de variable par les opérations réciproques appliquées de part et d'autre du signe égal nous semble un préalable incontournable à toute automatisation du type « passer de l'autre côté ».

Nous proposons en *Annexe 7* une série d'exercices d'isolement de variables. Les exemples proposés présentent une double caractéristique :

- ils sont interdisciplinaires, en sollicitant des exemples de mathématiques et de SPC sur un même énoncé ;
- ils sont progressifs et thématisés, en partant des opérations simples jusqu'à des expressions complexes.

3. Vers le Supérieur : opération, ensemble et élément neutre

Lorsque le raisonnement par opérations réciproques est proposé à la place du « passer de l'autre côté », il arrive que des collègues s'étonnent, considérant qu'il est *évident* que « passer de l'autre côté » sous-entend « opération réciproque » ou bien pensent sincèrement qu'il suffit de le dire *une seule* fois pour que l'élève comprenne. La portée conceptuelle et pratique de cette approche n'est pourtant pas triviale et constitue un enjeu du Secondaire mais aussi du Supérieur : dans le Secondaire, ce type d'approche permet d'introduire et de travailler sur toutes les fonctions réciproques (racine, logarithme, arc sinus, …) mais aussi sur des objets tels que les matrices inverses.

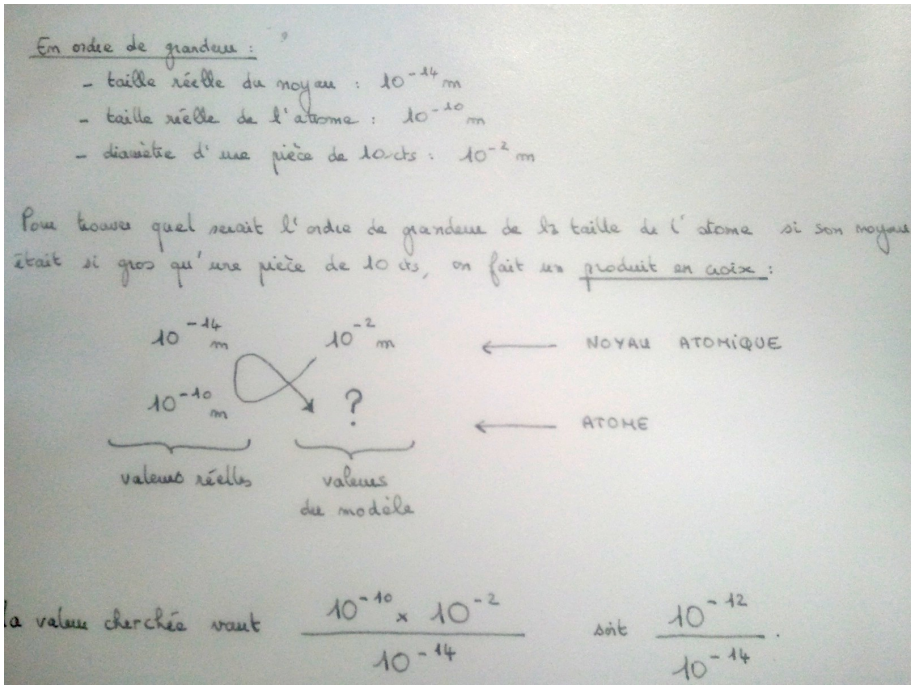
Plus généralement, l'utilisation d'opérations réciproques de part et d'autre du signe égal est une approche *universelle* en mathématiques : on retrouve cette démarche à tous niveaux, pour tous types d'objets et d'opérations. Soigner ces notions c'est aider les élèves à redonner du sens aux calculs, mais c'est aussi indirectement préparer les futurs étudiants aux concepts d'ensemble, d'opération sur les ensembles et d'élément neutre.

IV. La proportionnalité

La troisième et dernière attente souvent exprimée par les enseignants du Secondaire et du Supérieur au sujet des calculs porte sur la maîtrise de la proportionnalité. On présente en *Annexe 8* des exemples de travaux d'apprenants ; ils ont servi de base de travail lors d'une activité du stage PAF « Pour renouer avec le calcul ».

1. L'astuce pour la proportionnalité : le produit en croix (ou produit en alpha)

Les situations de proportionnalité sont fréquentes dans tout le Secondaire, mais aussi dans le Supérieur.
Le « produit en croix » est extrêmement répandu tant chez les élèves que chez les enseignants, toute disciplines confondues.
On peut voir ci-dessous la photographie du cours d'un collègue, sur les tailles relatives du noyau et d'un atome ramenés à des dimensions de l'ordre du quotidien :



Cette photo illustre bien une forme de *sacralisation* dont fait l'objet le « produit en croix ». On y voit aussi très bien comment trouver la « quatrième proportionnelle » (nombre manquant) : il suffit de multiplier les termes de la diagonale, puis de les diviser par le troisième.

Il est important de noter qu'au sens strict, cette procédure, bien que dérivée d'un produit en croix (au sens de l'égalité des fractions, voir ci-après), n'en est pas un car elle inclut une division. Le produit en croix de la proportionnalité étant souvent illustré sur la copie par un « alpha », nous utiliserons par la suite l'expression « produit en alpha » le désigner.

Il ressort des discussions avec les collègues l'omniprésence du produit en alpha chez les élèves. L'usage du produit en alpha est en fait aussi très répandu chez les collègues et probablement aussi chez les parents.

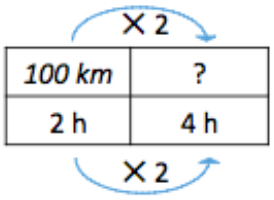
Certains collègues, ont déclaré « se battre » quotidiennement en classe contre son usage systématique, car alors les élèves passent à côté du raisonnement et agissent par conditionnement. Les élèvent se retrouvent ainsi par exemple à recourir au produit en alpha y compris pour résoudre des situations triviales d'un point de vue calculatoire du type : « une voiture parcourt 100 km en 1 heure ; quelle distance va-t-elle parcourir en 3 heures ? ».

2. Les raisonnements en proportionnalité:

Plusieurs types de raisonnements sont disponibles pour résoudre les situations de proportionnalité.

- **Propriété multiplicative (ou propriété d'homogénéité):**

« Un voiture parcourt 100 km en 2 h; quelle distance parcourt-elle en 4 h ? »



Cette propriété est très utile car permet de résoudre tous les problèmes de 4e proportionnelle (nombre recherché). C'est peut-être aussi la propriété la plus importante du point de vue de l'utilisation de la proportionnalité au quotidien et du point de vue de la compréhension des élèves.

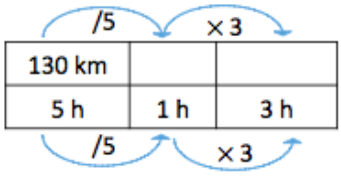
Cependant le facteur multiplicatif – trivial dans l'exemple ci-dessus - peut être difficile à trouver par les élèves notamment lorsque celui-ci est fractionnaire ou très grand.

- **Règle de trois et passage à l'unité (propriété multiplicative):**

La « règle de trois » et « le passage à l'unité » sont une seule et même procédure. L'expression « règle de trois » est souvent confondue avec le produit en alpha.

« Une voiture parcourt 130 km en 5 h à vitesse constante ; quelle distance a-t-elle parcourue en 3 h ? » ;
Le facteur permettant de passer de 5 h à 3 h par la propriété multiplicative n'étant pas toujours facile à trouver par les élèves, on résout le problème en passant par l'unité, ici 1 h, en trois étapes (d'où « règles de trois *étapes* » et « passage à l'unité »)

1. On pose les données : Une voiture parcourt 130 km en 5 h ;
2. On trouve la distance pour 1 h : 130 km / 5 = 26 km en 1 h ;
3. On trouve la distance pour 3 h : 3 × 130 km / 5 en 3 h.



- **L'égalité des rapports**

Dans un tableau de proportionnalité, le coefficient de proportionnalité est un concept central ; il se traduit par la propriété d' « égalité des rapports » :

130 km	52 km	78 km
5 h	2 h	3 h

$$\frac{130\,km}{5\,h} = \frac{52\,km}{2\,h} = \frac{78\,km}{3\,h} = \frac{26\,km}{1\,h} = V$$

On peut noter que numériquement, la propriété « d'égalité des rapports » revient au « passage à l'unité ». Dans le cas de tableaux de grandeurs, le coefficient de proportionnalité est donc une grandeur quotient qui a souvent une signification importante (ex : distance / durée).

- **Propriété additive et combinaisons linéaires :**

La propriété additive de la linéarité consiste à additionner les éléments d'une même ligne du tableau de proportionnalité :

60 km	40 km	?
1,5 h	1h	2,5 h

2,5 h = 1,5 h + 1 h, donc par linéarité, la distance parcourue pendant 2,5 h vaut 60 km + 40 km = 100 km.

Cette propriété est utile surtout avec un tableau de proportionnalité comportant plusieurs colonnes, ce qui permet de choisir les valeurs utiles ; cette propriété est en pratique beaucoup moins utilisée que la propriété de multiplication.

La propriété d'additivité combinée à la propriété de multiplication de la linéarité, conduit aux combinaisons linéaires, approche très utile dans le Supérieur.

- **La représentation graphique**

On peut transposer graphiquement les propriétés d'additivité et de multiplication, les combinaisons linéaires, le passage à l'unité mais aussi le concept central de coefficient de proportionnalité qui s'identifie alors au coefficient directeur.

- **La proportionnalité dans le Primaire et le Secondaire**

En École Primaire, les procédures de résolution à enseigner sont celles basées sur :
- les propriétés additives et multiplicatives de la linéarité ;
- les passages à l'unité ou règle de trois ;
- le coefficient de proportionnalité ;

On relève que « les procédures du type égalité des rapports, égalité des produits en croix et exploitation d'un graphique relèvent du Secondaire ».

3. Produit en croix et linéarité

Le « produit en croix » est aujourd'hui très souvent évoqué spontanément par les élèves dès lors qu'une situation de proportionnalité semble se présenter. Dans ce paragraphe, nous précisons sa relation avec la linéarité.

- **Le produit en croix et les fractions**

Le produit en croix est initialement un critère de vérification de l'égalité entre deux rapports :

Pour savoir si $\frac{57}{133} = \frac{420}{580}$ est vraie, on en fait le « produit en croix » : $57 \times 580 = 133 \times 420$

L'intérêt du « produit en croix » est donc avant tout de passer du calcul de deux divisions aux calculs de deux multiplications. Comme la calculatrice est aujourd'hui très répandue, cette motivation peut sembler désuète, mais cela n'a probablement pas toujours été le cas.

On trouve aussi parfois l'expression « égalité des produits en croix » ; dans la continuité de la définition précédente du produit en croix, on peut voir dans cette expression un pléonasme, car le produit en croix, ainsi défini, est déjà en lui-même une égalité.

Le produit en croix n'est donc pas intrinsèquement lié à la proportionnalité.

- **Produit en croix et tableau de proportionnalité**

Pour identifier une relation de proportionnalité entre des grandeurs ou des nombres, il suffit de vérifier par le calcul de « l'égalité des rapports » (voir propriété ci-dessus). En ce sens le « produit en croix » peut être utile à la proportionnalité (surtout en l'absence de calculatrice) ; mais celui-ci n'a conceptuellement rien d'indispensable.

Dans le tableau de proportionnalité le « produit en croix », initialement défini pour les égalités de rapports, prend une nouvelle représentation – des croix entre les cases - sans qu'il soit besoin de faire référence à « l'égalité des rapports »:

objet	3 œufs	4 œufs	7 œufs
propriété	1,5 €	2,0 €	3,5 €

Il est important de noter que dans le tableau de proportionnalité, il y a bien *plusieurs* « produits en croix » et *qu'ils ne sont pas égaux* (contrairement à l'expression « égalité des produits en croix » très répandue en mathématiques de collège) : bien qu'issus du même tableau de proportionnalité, le produit en croix « 3 œufs × 2,0 € = 4 œufs × 1,5 € » n'est pas égal au produit en croix « 3 œufs × 3,5 € = 7 œufs × 1,5 € », qui n'est pas égal au produit en croix « 4 œufs × 3,5 € = 7 œufs × 2,0 € » ;

On peut aussi relever que dans le cas de tableaux de grandeurs, les produits en croix sont une grandeur produit qui n'a pas toujours de signification pertinente (ex : distance × durée).

Le « produit en alpha » apparaît lui, comme un produit en croix « prolongé », c'est-à-dire auquel on a ajouté l'étape d'isolement de la quatrième proportionnelle recherchée.

- **Produit en croix, colinéarité, et produit vectoriel**

On retrouve aussi le produit en croix lorsqu'il s'agit de vérifier la colinéarité de deux vecteurs à partir de leurs coordonnées : pour savoir si le vecteur $\vec{U}$ est colinéaire au vecteur $\vec{V}$, on fait le produit en croix appliqué à leurs coordonnées : $\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$

Ce qui conduit à vérifier l'égalité $U_x.V_y = U_y.V_x$

Ici encore, le produit en croix est utilisé comme une astuce, c'est-à-dire sans référence à des concepts mathématiques et à leurs propriétés. C'est pourtant encore une fois l'égalité des rapports qui est initialement au cœur de la démarche. En effet, les coordonnées des vecteurs définissent les coefficients directeurs des

droites qui leurs sont parallèles, ce qui conduit à vérifier l'égalité des rapports : $\frac{U_y}{U_x} = \frac{V_y}{V_x}$; le produit en croix n'intervient que pour simplifier cette vérification.

Il est intéressant de noter que l'égalité du produit en croix $U_x.V_y = U_y.V_x$, conduit naturellement à celle du produit vectoriel de deux vecteurs : $U_x.V_y - U_y.V_x = 0$.

Au final,

- **le produit en croix et le produit en alpha pris en tant qu'astuces conduisent les élèves à passer à côté des concepts fondamentaux et des raisonnements : égalité des rapports, propriétés de la linéarité, isolement de variable ;**
- **Les propriétés de la linéarité et notamment les résolutions par combinaisons linéaires sont aussi une préparation au Supérieur et en particulier à l'algèbre linéaire (résolution de systèmes linéaires) et matricielle ;**
- **Le travail sur la colinéarité des vecteurs est une entrée vers l'introduction du produit vectoriel en vue du Supérieur.**

V. Les astuces, raisonnements, automatisations : l'enjeu du temps

La force de l'astuce dans la classe, c'est le temps qu'elle ne fait pas perdre – *à court terme* - à l'enseignant. Dans une logique de « résultat », elle offre aussi un *statu quo*, satisfaisant pour l'élève et l'enseignant. Mais l'astuce a son coût sur le long terme : oubli de l'astuce, perte de capacité de raisonnement et d'initiative sur des problèmes nouveaux, image dogmatisée de la science et de la raison.

Les *automatismes* sont essentiels à mettre en place chez les élèves pour gagner du temps et de libérer de l'espace de réflexion pour un sujet nouveau. Cependant, un automatisme ne passe pas nécessairement par une astuce. En effet, un automatisme peut aussi résulter de raisonnements répétés un nombre de fois tel qu'il pourrait s'agir alors de « *comprendre par cœur* ».

Mettre en place ces automatismes de calculs est un enjeu d'enseignement. Plusieurs formats sont imaginables. Il est par exemple de plus en plus répandu de démarrer la séance de classe avec des « quizz » de quelques minutes ; ces derniers permettent de mobiliser les élèves tout en révisant les « gammes ». La plateforme WIMS semble aussi être un outil intéressant : plateforme numérique publique, accessible gratuitement depuis internet, elle permet aux élèves de s'entrainer hors de l'École à partir d'exercices évolutifs conçus par l'enseignant ou directement issus d'une banque de ressources, tout en permettant à l'enseignant de suivre les résultats des élèves.

Au final, l'astuce ne nous semble pas nécessairement à bannir, mais il est important de la replacer dans un contexte d'apprentissage : utile dans un premier temps, pour *savoir faire*, il nous semble essentiel de la faire évoluer vers le *raisonnement,* (quitte à y revenir par la suite, à la lumière de la raison cette fois) pour enfin tendre vers une *automatisation raisonnée*.

VI. Préparation de l'activité d'entre journées

Pour le stage PAF « Renouer avec le calcul » qui se déroule sur deux jours, une activité d'entre-journées a été proposée pour l'expérimenter en mathématiques, en SPC, de manière conjointe, en devoir maison ou en activité de classe.
L'analyse de l'activité sera faite collectivement lors de la deuxième journée.
En voici l'énoncé :

PROBLEME

« Une voiture roule sur une autoroute à la vitesse de 110km/h . On considère que son régulateur de vitesse est idéal et que sa vitesse reste parfaitement constante.
Un camion roule sur une autoroute à la vitesse de 90km/h . On considère que son régulateur de vitesse est idéal et que sa vitesse reste parfaitement constante.
Au moment où la voiture s'arrête sur une aire d'autoroute, le camion passe devant celle-ci. La voiture s'arrête exactement 10 minutes, puis redémarre et on considère qu'elle acquiert instantanément la vitesse de 110 km/h.
Au bout de combien de temps après son départ de l'aire et à quelle distance de celle-ci, la voiture aura t -elle rattrapé le camion ? »

VII. Bibliographie

Bibliographie concernant les unités dans les calculs :

CHEVALLARD Yves et BOSCH Marianna. *Les grandeurs mathématiques au Collège. Partie I. Une Atlantide oubliée*. 2000-2001, Petit x n°55.

CHEVALLARD Yves et BOSCH Marianna. *Les grandeurs mathématiques au Collège. Partie II. Mathématisations*. 2000-2001, Petit x n°55.

PRESSIAT André. *Grandeurs et mesures: évolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition*. Août 2001, Actes de la 11° Ecole d'Éte de Didactique des Mathématiques.

WHITNEY Hassler. *The mathematics of physical quantities, part I : Mathematical models for* measurement. 1968, The *Americain Mathematical Monthly.*

WHITNEY Hassler. *The mathematics of physical quantities, part II : Quantity structures and dimensional analysis.* 1968, The Americain Mathematical Monthly.

Document d'accompagnement du programme de mathématiques au Collège: Grandeurs et mesures au collège. Octobre 2007, Éduscol.

VIII. Annexes

1. Annexe 1 : évolutions des programmes et de leurs contenus

Seuls les contenus mathématiques des programmes SPC sont mentionnés dans le premier tableau ; seuls les contenus mathématiques directement utiles à la physique et à la chimie sont mentionnés dans le deuxième tableau.

Évolution des contenus en SPC	Ancien Programme	Nouveau Programme
Fonction exponentielle	central	disparu
Équations différentielles	central	disparu
Calcul différentiel	central	présent
Calcul vectoriel	central	présent
Mesures et incertitudes	peu présent	rôle central
Équations algébriques	présent	rôle central

Évolution des contenus en maths	Ancien Programme	Nouveaux Programmes
Equations différentielles	présent	disparu
Coordonnées polaires	présent	disparu
Transformations	présent	disparu
Nombres complexes	central	peu présent
Calcul vectoriel	central	peu présent
Algorithmique	absent	présent
Probabilités/statistiques	présent	central

2. Annexe 2 : énoncés de travail avec les collègues stagiaires

Les exercices présentés ci-dessous sont de niveau 3e. Ils ont été utilisés comme base de travail avec les collègues stagiaires pour aborder la question des grandeurs, mesures et unités dans les énoncés des exercices de mathématiques.

Exercice 1 *:*

Lors d'un freinage d'urgence, le temps que met une voiture à s'arrêter se décompose en deux parties : le temps de réaction, généralement d'une seconde environ est le temps nécessaire au conducteur pour prendre conscience de la situation et appuyer sur le frein ; le temps de freinage lui-même.

Pour calculer la distance d'arrêt D_a d'un véhicule, il faut donc additionner :

- La distance D_r parcourue pendant le temps de réaction.
- La distance D_f parcourue pendant le temps de freinage. Soit V la vitesse en km/h d'un véhicule. La formule donnant la distance de freinage en m est :

  $D_f = \frac{V^2}{254f}$ où f est le coefficient d'adhérence qui dépend de l'état de la chaussée, …

  Sur route sèche, f = 0,8. Sur route mouillée, f = 0,4.

Pour toute la suite, on suppose que le temps de réaction du conducteur de ce véhicule est de 1 s et que, pendant ce temps, la vitesse du véhicule reste constante.

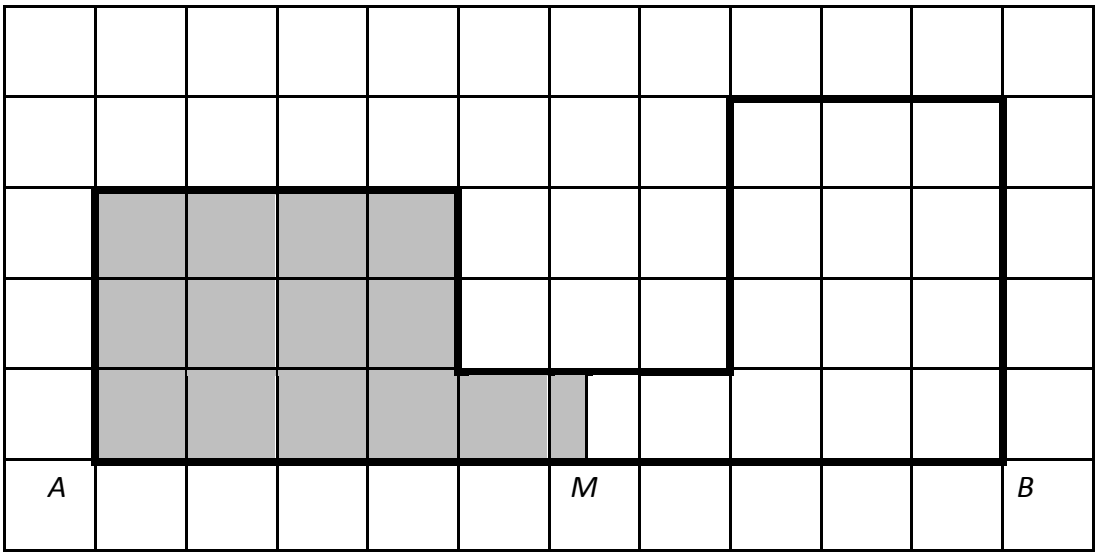
1. *Calculer la distance en m parcourue pendant le temps de réaction pour une vitesse de 90 km/h. Arrondir au dm près.*
2. *On souhaite compléter le tableau suivant à l'aide du tableur, en arrondissant si nécessaire au dixième près. Expliquer la démarche.*

V (en km/h)	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*90*	*100*	*110*	*120*	*130*	*140*	*150*
D_r (en m)													

3. *D'une manière générale, quelle formule permet de donner la distance en mètres parcourue pendant le temps de réaction pour un véhicule roulant à une vitesse V en km/h ?*

Exercice 2 *:*

Sur la figure ci-dessous, AB = 10 et M est un point qui décrit le segment [AB]. On note x la distance AM.

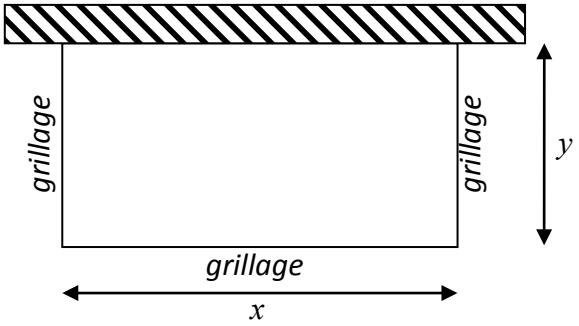


1. *Exprimer l'aire de la partie grisée lorsque $4 \leq x \leq 7$.*
2. *Pour quelle valeur de x l'aire de la partie grisée est-elle égale à 16,2 ?*

Exercice 3 *:*

Un éleveur a acheté 40 m de grillage ; il veut adosser un enclos rectangulaire à sa grange, contre un mur de 28 m de long.

Il souhaite ainsi offrir le maximum de place à ses brebis en utilisant le grillage.



1. a. *Pour x = 4 m, calculer la longueur y, puis l'aire A de l'enclos en m².*
   b. *Recopier et compléter le tableau ci-dessous :*

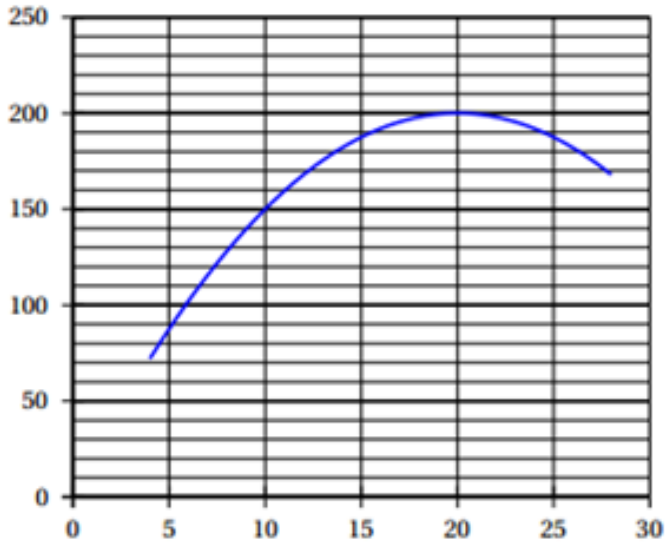
x (en m)	*4*	*10*	*20*	*28*
y (en m)				
A (en m²)				

2. *Déterminer y en fonction de x.*
   En déduire que $A = 20x - 0{,}5x^2$.

3. *Voici la plage de cellules réalisées dans un tableur-grapheur que permettra de calculer la valeur de A.*
   Quelle formule doit-il saisir dans la cellule B2 et qui pourra être étendue sur toute la colonne B ?

1	*Valeur de x*	*Valeur de A*
2	*4*	
3	*6*	
4	*8*	
5	*10*	
6	*12*	
7	*14*	
8	*16*	
9	*18*	
10	*20*	
13	*26*	
14	*28*	

4. *Le graphique ci-dessous représente l'aire A en fonction de la longueur x compris entre 4 m et 28 m.*



A l'aide de ce graphique, répondre aux questions suivantes en donnant des valeurs approchées :

a. *Quelle est l'aire de cet enclos pour x = 14 m ?*

b. *Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de l'enclos est égale à 193 m² ?*

c. *Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de l'enclos est maximale ?*

En déduire les dimensions de l'enclos pour que les brebis aient le maximum de place.

3. Annexe 3 : énoncés typiques de collège et leurs corrigés

Corrigés d'exercices d'un livre de mathématique de 3ème (livre du professeur, édition 2012)

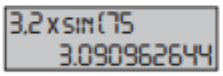
Dans cet ouvrage, l'utilisation des unités de mesures est systématique pour faire des conversions.

Cependant, lors les enchaînements d'opérations, la présence des unités est beaucoup plus variable d'un exercice à l'autre et dépend notamment :

- des grandeurs en jeu : par exemple, le symbole ° est systématiquement utilisé (alors qu'au collège on n'utilise pas d'autre unité de mesure d'angle que le degré) et l'unité de longueur n'est jamais écrite en trigonométrie ;
- de l'utilisation ou non d'écritures algébriques : les unités de mesures sont peu fréquentes dans les calculs algébriques et dans les équations, en particulier lorsque les expressions deviennent plus complexes ;
- de la complexité des calculs et du nombre de grandeurs en jeu dans le même calcul.

10 Dans le triangle RST rectangle en R :
$\tan \widehat{RST} = \frac{RT}{RS}$ c'est-à-dire $\tan \widehat{RST} = \frac{5,1}{7,2}$.
Avec la calculatrice, on trouve $\widehat{RST} = 35°$.
Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires, donc $\widehat{RTS} = 90° - \widehat{RST}$.
Ainsi $\widehat{RTS} = 90° - 35°$ c'est-à-dire $\widehat{RTS} = 55°$.

3 **Calculer des longueurs**
a. Dans le triangle ABC rectangle en B, $\sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC}$, c'est-à-dire $\sin 75° = \frac{AB}{3,2}$.
On a donc $AB = 3,2 \times \sin 75°$.
b.



Avec la calculatrice, on trouve AB = 3,09 m.
Dans le triangle ABC rectangle en B,
• Le théorème de Pythagore permet d'écrire :
$AC^2 = BC^2 + AB^2$, c'est-à-dire $3,2^2 = BC^2 + 3,09^2$.
Ainsi, $BC^2 = 3,2^2 - 3,09^2$.
D'où $BC = \sqrt{0,6919}$.
Avec la calculatrice, en arrondissant au centimètre, on trouve BC = 0,83 m.
• $\cos \widehat{BCA} = \frac{BC}{AC}$, c'est-à-dire $\cos 75° = \frac{BC}{3,2}$.
On a donc $BC = 3,2 \times \cos 75°$.
Avec la calculatrice, en arrondissant au centimètre, on trouve BC = 0,83 m.

34 **a.** ON = OE = 6 370 km.
Le triangle ONE est rectangle en O donc :
$NE^2 = OE^2 + ON^2 = 6\,370^2 + 6\,370^2$.
Donc $NE^2 = 81\,153\,800$ et NE ≈ 9 009 km.
L'arrondi au km de NE est 9 009 km.
b. $\frac{1}{4} \times 2\pi \times 6\,370$ km $= 3\,185\pi$ km.
À vol d'oiseau, l'arrondi au km est 10 006 km.

34 (YE) et (DC) sont perpendiculaires à (DE) donc elles sont parallèles et les droites (YC) et (DE) sont sécantes en A, donc on applique le théorème de Thalès et on a :
$\frac{AY}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{YE}{DC}$
Donc $\frac{170}{DC} = \frac{56}{140}$ donc $DC = 170 \times \frac{140}{56} = 425$ cm soit 4,25 m.

23 **a.** Le théorème de Thalès s'applique. Le triangle ADE est un agrandissement de ABC.
b. Le coefficient d'agrandissement est donné par $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{3}$ donc $AE = \frac{4}{3} \times 2,4$ cm $= 3,2$ cm.
c. $BC = \frac{3}{4} \times 5,2$ cm $= 3,9$ cm.

51 **1. a.** $\mathscr{A}_1 = 4\pi R_1^2 = 4 \times \pi \times 1{,}2^2 = 5{,}76\pi$.
Donc $\mathscr{A}_1 = 5{,}76\pi$ cm².
b. 3 mm = 0,3 cm et $\frac{0{,}3}{1{,}2} = \frac{1}{4}$.
Donc la petite sphère est une réduction de rapport $\frac{1}{4}$ de la grande sphère.
Dans une réduction de rapport k les aires sont multipliées par k^2 donc pour obtenir $\mathscr{A}_2$ on doit multiplier :

$$\mathscr{A}_1 \text{ par } \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

c'est-à-dire par $\frac{1}{16}$.

$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{16} \times 5{,}76\pi = 0{,}36\pi$.
Donc $\mathscr{A}_2 = 0{,}36\pi$ cm².
2. a. $\mathscr{V}_1 = \frac{4}{3} \times \pi R_1^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 1{,}2^3 = 2{,}304\pi$.
Donc $\mathscr{V}_1 = 2{,}304\pi$ cm³.
b. Dans une réduction de rapport k les volumes sont multipliés par k^3 donc pour obtenir $\mathscr{V}_2$ on doit multiplier $\mathscr{V}_1$ par $\left(\frac{1}{4}\right)^3$, c'est-à-dire par $\frac{1}{64}$.

$\mathscr{V}_2 = \frac{1}{64} \times 2{,}034\pi = 0{,}036\pi$.
Donc $\mathscr{V}_2 = 0{,}036\pi$ cm³.
3. $20 \times 2 \times 1{,}2 + 20 \times 2 \times 0{,}3 = 60$.
La longueur minimale du collier est 60 cm.

6 **Comprendre l'effet sur les volumes**
1. a. $V = (AB \times BC) \times \frac{SA}{3} = 0{,}6$ dm³.
b. $A_{A'B'C'D'} = 2^2 \times A_{ABCD} = 2^2 \times 1{,}2$ dm² = 4,8 dm²
SA' = 1,2 × SA = 3 dm.
c. $V' = 4{,}8 \text{ dm}^2 \times \frac{3 \text{ dm}}{3} = 4{,}8 \text{ dm}^3$
$V' = 2^3 \times V$.
2. L'aire de la base réduite est $0{,}4^2 \times 1{,}2$ dm² = 0,192 dm².
La longueur de la hauteur réduite est de :

$$0{,}4 \times 1{,}5 \text{ dm} = 0{,}6 \text{ dm}.$$

Le volume de cette réduction est donc de :

$$0{,}192 \text{ dm}^2 \times \frac{0{,}6}{3} \text{ dm}^3 = 0{,}0384 \text{ dm}^3.$$

3. Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, les volumes sont multipliés par k^3.

60 **a.** $t = \frac{d}{v} = \frac{110}{50} = 2{,}2$ donc la voiture parcourt 110 km en 2,2 h ou 2 h 12 min.
b. 1 h 15 min = 1,25 h.
c. $v = \frac{d}{t} = \frac{5}{1{,}25} = 4$ donc sa vitesse moyenne est 4 km/h.

61 **a.** • $4{,}5 \text{ m/s} = \frac{4{,}5 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{4{,}5 \times 3\,600 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{16\,200 \text{ m}}{1 \text{ h}}$
$= \frac{16{,}2 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 16{,}2 \text{ km/h}$
Donc 4,5 m/s = 16,2 km/h.
• $28 \text{ m/s} = \frac{28 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{28 \times 3\,600 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{100\,800 \text{ m}}{1 \text{ h}}$
$= \frac{100{,}8 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 100{,}8 \text{ km/h}$
Donc 28 m/s = 100,8 km/h.
b. $72 \text{ km/h} = \frac{72 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{72\,000 \text{m}}{3600 \text{ s}} = \frac{20 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$
Donc 72 km/h = 20 m/s.

62 **1.** $1\,620 \text{ m}^3\text{/h} = \frac{1\,620 \text{ m}^3}{1 \text{ h}} = \frac{1\,620\,000 \text{ L}}{3\,600 \text{ s}} = 450 \text{ L/s}$.
$1\,620 \text{ m}^3\text{/h} = \frac{1\,620 \text{ m}^3}{1 \text{ h}} = \frac{1\,620 \text{ m}^3 \times 24}{24 \text{ h}} = 38\,880 \text{ m}^3\text{/jour}$.

9 On note x le nombre de cartouches achetées (x est un nombre entier positif).
La dépense (en €) est $17{,}3x$ sur le site A et $15 + 15{,}2x$ sur le site B. On cherche donc le nombre entier x à partir duquel $15 + 15{,}2x < 17{,}3x$. On résout cette inéquation.
On obtient : $\frac{15}{2{,}1} < x$. Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à $\frac{15}{2{,}1}$. Le plus petit nombre entier supérieur à $\frac{15}{2{,}1}$ est 8. Donc on a intérêt à choisir le site B si on achète 8 cartouches ou plus.

88 On désigne par c la consommation de cette famille (en kWh).
Avec le tarif 1, la famille dépense $0{,}2c$ €.
Avec le tarif 2, elle dépense $30 + 0{,}12c$ €.
On compare les coûts avec les deux tarifs :

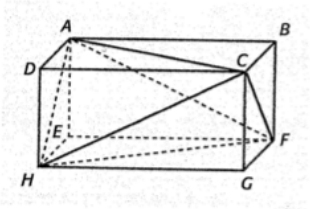
$$0{,}2c < 30 + 0{,}12c.$$

Ainsi $0{,}08c < 30$ ou $c < 375$. Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 375.
Conclusion : le tarif 1 est le plus avantageux si la famille consomme moins de 375 kWh par mois, et le tarif 2 est le plus avantageux si elle consomme plus de 375 kWh par mois. Pour une consommation de 375 kWh par mois, le montant de la dépense est le même quel que soit le tarif.

4. Annexe 4 : énoncés de lycée

Exercices 36 et 37 : exercices consécutifs dans le livre - l'un est « sans unité», l'autre « avec ».
Exercice 6 : une correction ; dans les applications numériques, les unités n'apparaissent qu'en fin de calcul.
Exercices 44 : longueurs et les volumes sont « sans unités », mais les angles sont exprimés en degrés.

36. *ABCDEFGH* est un parallélépipède rectangle. Ses six faces sont des rectangles identiques deux à deux.



On pose $AB = 4$, $AD = 1$ et $AE = 2$.

1. On considère le tétraèdre *ACFH* : calculer la longueur de ses arêtes.

2. Calculer le volume de chacun des tétraèdres *DACH*, *BACF*, *GCHF*. En déduire celui du tétraèdre *ACFH*.

37. *ABCDEFGH* est un cube d'arête 6 cm.

1. Calculer le volume du tétraèdre *ABDE*.

2. Montrer que le triangle *BDE* est équilatéral et donner la valeur exacte de son aire.

6 **a.** ABCD est un tétraèdre, FCBED est une pyramide.

b. L'aire du triangle ABC vaut :

$$b = \frac{BC \times h}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ cm}^2$$

ABCDEF est un prisme droit donc [AD] est une hauteur dans le tétraèdre ABCD.

Or AD = FC = 6 cm d'où :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} b \times AD = \frac{1}{3} \times 10 \times 6 = 20 \text{ cm}^3$$

Le volume de FCBED s'obtient en retranchant celui du tétraèdre à celui du prisme :

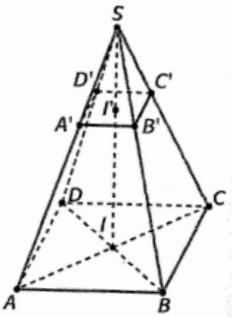
$$V_{FCBED} = V_{ABCDEF} - V_{ABCD} = b \times AD - 20$$
$$= 10 \times 6 - 20 = 40 \text{ cm}^3$$

c. Il suffit de couper la pyramide FCBED en deux tétraèdres de même volume. En gardant la même hauteur issue de D, il suffit de couper la base en deux triangles de même aire, par exemple FCB et FBE qui donnent les tétraèdres FCBD et FBED.

44. Calculer dans les solides usuels

SABCD est une pyramide de sommet *S*, de base le rectangle *ABCD*, telle que : $AB = 8$; $BC = 6$; $SA = SB = SC = SD = 13$. Soit *I'* le point de la hauteur de la pyramide tel que $SI' = 3$. Le plan passant par *I'* et parallèle au plan *ABCD* coupe la pyramide selon le rectangle *A'B'C'D'*.

	A	B	C	D
1. La hauteur de la pyramide est	10	11	12	13
2. *A'B'* est égal à	1,5	2	3	4
3. L'angle $\widehat{ASC}$ est égal, à un degré près, à	40°	42°	45°	50°
4. Le volume du tronc de pyramide *ABCDA'B'C'D'* est	180	189	190	192



Voir les réponses page 301

5. Annexe 5 : Évolution de l'enseignement des mathématiques en Primaire

Dans l'histoire de l'enseignement on enseignait les grandeurs puis les ensembles de nombres.
Le travail se faisait sur des grandeurs comme l'illustre cet extrait d'un livre des années 1950 :

1re LEÇON

ADDITION ET SOUSTRACTION

RENSEIGNEZ-VOUS. — 1 ▪ A la mairie, sur la superficie totale de la commune et le chiffre de sa population d'après le dernier recensement.

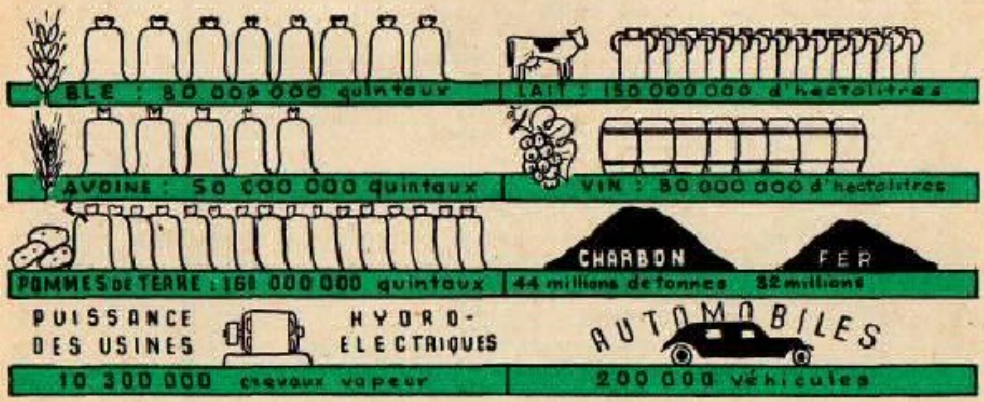
2 ▪ Sur la population des six plus grandes villes de France et sur celle de la France métropolitaine.

3 ▪ Ecrire tous les nombres de trois chiffres que l'on peut former avec 9, 1 et 5.

ÉCRITURE ET LECTURE D'UN GRAND NOMBRE. —

1° **Mille.** Dans 347 000 il y a 3 centaines, 4 dizaines et 7 unités de mille :

300 000 + 40 000 + 7 000 ; qu'on lit :
trois cent quarante sept mille.



2° **Millions et milliards.** — Mille milliers forment un million (1 000 000). Mille millions forment un milliard (1 000 000 000). Millions et milliards se comptent comme les mille, en unités, dizaines et centaines (3 chiffres).

Pour lire un grand nombre, on le sépare en tranches de 3 chiffres à partir de la droite. On énonce successivement les tranches, en commençant par la gauche, en les faisant suivre des mots : milliards, millions, mille et du nom de l'unité.

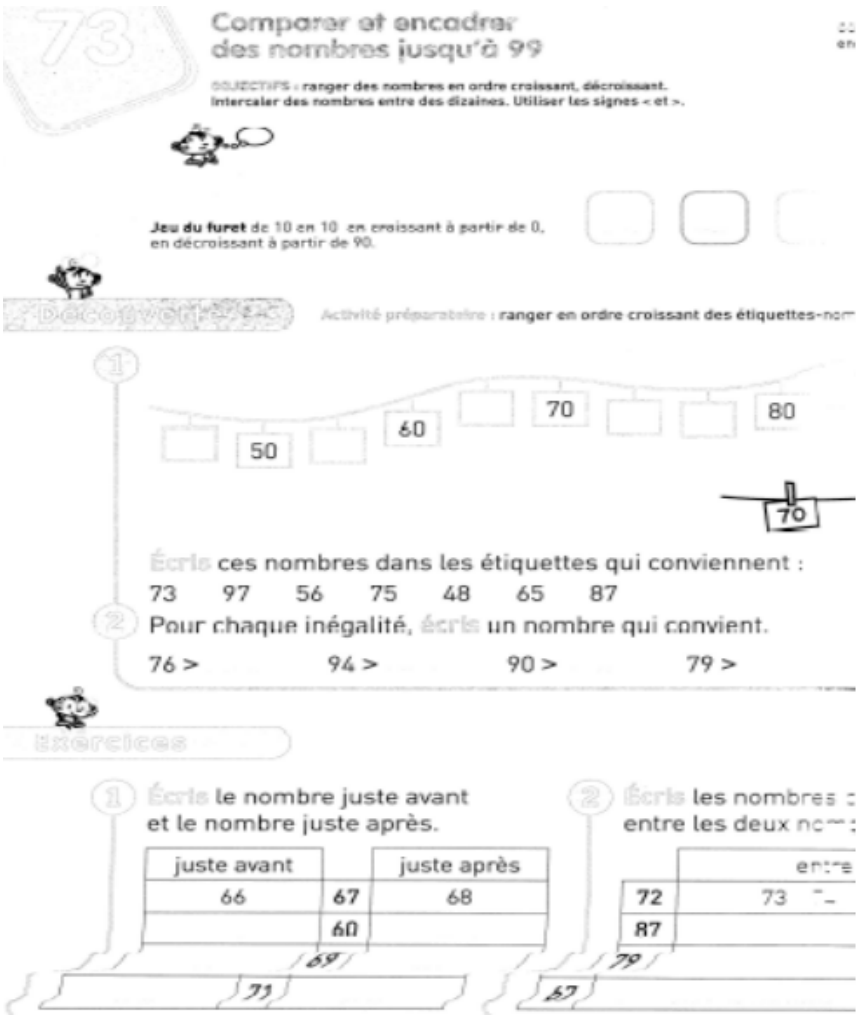
4 ▪ Lire la phrase : la consommation de lait, en France, a été de 146 310 500 hl.

5 ▪ Ecrire en chiffres le nombre : un milliard, six cent vingt millions, trois cent huit mille, trois cent francs anciens.

6 ▪ Ecrire et lire ce même nombre en nouveaux francs.

8

Les années 70 ont changé le point de vue : ci-dessous, extrait d'un livre de 2009. Les nombres sont traités comme des objets mathématiques pour eux-mêmes :



Plusieurs facteurs ont pu contribuer à ces changements notamment l'évolution des mathématiques fondamentales (Bourbaki et les structures, Lebesgue et autres sur la mesure) mais aussi les évolutions technologiques du quotidien (plus besoin d'apprendre à utiliser une balance de Robervall pour mesurer des masses) et au final une augmentation de la distance entre les maths savantes et les pratiques de la vie courante.

Ces changements ont conduit la communauté de mathématiques à opérer une rupture dans l'enseignement entre les grandeurs et le numérique et à se concentrer sur l'étude d'objets "mathématiquement purs". Brousseau dit à ce propos "les grandeurs et les nombres ont du mal à vivre ensemble". Les grandeurs sont vues comme une interface entre le réel et le monde des nombres. Dans les classes de mathématiques, livre et enseignant pratiquent de manière implicite des changements de cadres permanents entre celui des grandeurs et celui des nombres.

On peut remarquer que dans les programmes, la partie grandeurs et mesures présente à l'École Primaire et au Collège a disparu du lycée, en s'effaçant devant l'étude des fonctions.

6. Annexe 6 : Extraits d'un document d'accompagnement du Primaire ainsi que d'un livre du professeur.

Extraits du document d'accompagnement sur grandeurs et mesures pour l'école élémentaire :

Les premières activités visent **à construire** chez les élèves **le sens de la grandeur**, indépendamment de la mesure et avant que celle-ci n'intervienne. Le concept s'acquiert progressivement en résolvant des problèmes de comparaison, posés à partir de situations vécues par les élèves, suivis de moments d'institutionnalisations organisés par le maître. De tels problèmes amènent notamment **à classer des objets** : certains, pourtant d'apparences différentes, sont équivalents selon un critère déterminé, longueur, aire… : ainsi un crayon peut avoir la même *longueur* qu'un stylo, mais il existe des crayons de *longueurs* différentes ; il suffit de les disposer côte côté pour le constater. Les problèmes posés peuvent donner lieu à :

- des **comparaisons directes** : juxtaposition, superposition pour les longueurs, les angles ou les aires ; transvasements du contenu d'un récipient dans un autre pour les contenances ; soupesage ou utilisation de la balance Roberval pour les masses ;
- des **comparaisons indirectes** : recours à un objet intermédiaire (longueur servant de gabarit, masse fixée servant d'étalon) ou transformation de l'un des objets pour le rendre comparable à l'autre (par exemple, déroulement d'une ligne non rectiligne) ; découpage et recomposition d'une surface pour les aires…

6. Le calcul sur les grandeurs

Aucune virtuosité sur les conversions d'unités n'est demandée. Au départ, les résultats de mesurage peuvent être exprimés avec des expressions « complexes », c'est-à-dire utilisant plusieurs unités, par exemple 1 m 7 cm (ou 1 m et 7 cm). Ce choix est usuel dans les expressions liées à la monnaie, par exemple : 3 euros 20 centimes (ou 3 euros et 20 centimes) et plus encore aux durées : 2h 50 min.

A la fin du cycle 3, lorsque l'utilisation des nombres décimaux se généralise, un travail est conduit sur l'égalité d'expressions comme 1 m 7 cm et 1,07 m. Il est aussi intéressant de travailler avec les élèves sur des égalités comme 2h 30 min = 2,5 h ou 2h 15 min = 2,25 h : en effet le passage de l'écriture « complexe » à l'écriture décimale (et vice versa) résulte d'un apprentissage qui sera poursuivi au collège.

Donner comme mesure 1,5 pour la longueur d'un segment n'a pas de sens : il peut s'agir de 1,5 cm ou de 1,5 dm ou encore d'une autre longueur. Une longueur n'est parfaitement connue et définie que si on précise un nombre **et** une unité de longueur : par exemple 23 cm ou 230 mm ou encore 2,3 dm.

Il est donc légitime et correct d'écrire des égalités telles que :

1 m = 100 cm 1 km = 1000 m
1 h = 60 min
23 cm = 230 mm 23 cm = 2,3 dm 23 cm = 230 cm = 2,3 dm

Puisque les grandeurs considérées (longueurs, aires, volumes, durées, masses) peuvent s'additionner, se soustraire, être multipliées ou divisées par un nombre, les écritures suivantes sont correctes et leur utilisation est recommandée :

3 cm + 15 mm = 30 mm + 15 mm = 45 mm = 4,5 cm
3 kg + 500 g = 3,5 kg = 3500 g
4 x 37 cm = 1,48 m
3 h 45 min +1 h 28 min = 4 h 73 min = 5 h 13 min
3 x 15 min = 45 min

Extraits d'un «livre du maître» en CM1 : on retrouve la même problématique que l'introduction de la mesure d'une surface sous une courbe au lycée.

ÉTAPE 1 ■ Mesure d'aires selon différentes unités

- Par équipes. Chaque élève dispose de la fiche intitulée "Casse-tête" et procède à une recherche personnelle avant de débuter le travail d'équipe. Certains groupes utiliseront le grand carreau U1 comme unité et les autres le petit carreau U2.
- **Comparaison des résultats**

avec u_1
4 < aire A < 12
8 < aire B < 24
9 < aire C < 13
aire D = 9

Ces résultats ne permettent pas de trouver l'empreinte dont l'aire est la plus petite.

avec u_2
25 < aire A < 35
44 < aire B < 74
36 < aire C < 44
aire D = 36

Cette nouvelle unité permettant des mesures plus précises, il est possible de ranger les empreintes par ordre de grandeur.

aire A < aire D < aire C < aire B.

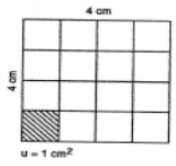
ÉTAPE 2 ■

Travaux et exercices 1 et 2 page 185

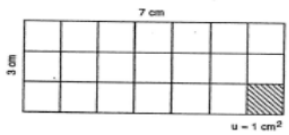
Exercice 1

aire de la maison A = 32
aire de la maison B = 27
aire de la maison C = 32

105 < aire de la parcelle A < 122
97 < aire de la parcelle B < 98
111 < aire de la parcelle C < 116



Le carré est formé de 4 rangées de 4 carrés
4 x 4 = 16
Aire du carré = 16 cm²



Le rectangle est formé de 3 rangées de 7 carrés
3 x 7 = 7 x 3 = 21
Aire du rectangle = 21 cm²

7. Annexe 7 : exercices d'entrainement d'isolement de variable

Document conçu et réalisé par Sophie Marcus, enseignante de mathématiques, et Pierre Labarbe, enseignant de sciences physiques et chimiques.

Isoler une variable dans une formule :

I- Avec des additions et des soustractions :

Une loi des nœuds donne l'égalité des courants suivante :

$$I_1 + I_2 - I_3 = I_4 - I_5.$$

Exprimer I_1 en fonction des autres courants. Faire de même avec I_2, I_3, I_4, I_5.

II- Avec des multiplications et des divisions :

1) *Loi d'Ohm : $U = R \times I$. Isoler I*
2) *Formule de la vitesse : $v = \frac{d}{t}$ Isoler d puis t.*
3) *Masse volumique : $\rho = \frac{m}{V}$. Isoler m puis V.*
4) *Périmètre d'un cercle : $P = 2\pi R$. Isoler R.*
5) *Equation des gaz parfait : $PV = nRT$. Isoler T puis V.*

III- Avec les 4 opérations :

1) *Aire d'un trapèze : $A = \frac{(B+b) \times h}{2}$. Isoler h puis B.*
2) *Equation horaire de la vitesse verticale d'un projectile : $v = -gt + v_0 \sin(\alpha)$. Isoler t.*
3) *Déviation d'un faisceau lumineux par une lame à face parallèles (vitre) : $d = e \times i \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, e est l'épaisseur de la lame, i l'angle d'incidence exprimé en radians et n l'indice de réfraction. Isoler e puis n.*
4) *Résoudre l'équation complexe : $\frac{z-3i}{z+1} = 2i - 1$*
5) *(u_n) et (v_n) sont deux suites telles que pour tout entier n, $v_n = 2u_n + 6$. Exprimer u_n en fonction de v_n.*
6) *(u_n) et (v_n) sont deux suites telles que pour tout entier n, $v_n = \frac{2}{3-u_n}$. Exprimer u_n en fonction de v_n.*
7) *(u_n) et (v_n) sont deux suites telles que pour tout entier n, $v_n = \frac{2u_n - 1}{3u_n + 4}$. Exprimer u_n en fonction de v_n.*

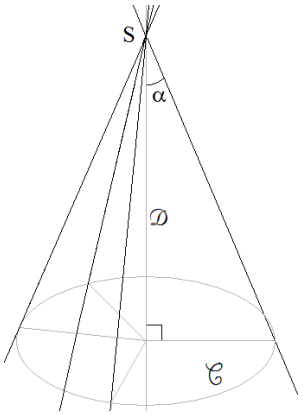
IV- Avec des carrés et des racines carrées :

1) *Aire d'un cercle :* $A = \pi R^2$. *Isoler R.*
2) *Force d'interaction gravitationnelle :* $F = G\frac{m_1 \times m_2}{d^2}$. *Isoler* m_1 *puis d.*
3) *Théorème de Pythagore :* $a^2 + b^2 = c^2$. *Isoler c puis a.*
4) (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites telles que pour tout entier n,* $v_n = {u_n}^2 - 4$. *Exprimer* u_n *en fonction de* v_n.
5) *Période d'un pendule simple :* $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. *Exprimer l puis g.*

V- Avec d'autres fonctions:

1) *Volume d'une sphère :* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. *Exprimer R.*
2) (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites telles que pour tout entier n,* $v_n = 2e^{u_n}$. *Exprimer* u_n *en fonction de* v_n. *(utiliser la fonction ln).*
3) *Loi de Descartes :* $n_1.\sin(i) = n_2 \sin(r)$. *Exprimer sin(i) puis i.*
4) *Niveau sonore L et intensité sonore I:* $I = I_0 .10^{L/10}$ *Exprimer L en fonction de I.*
5) *Décroissance radioactive :* $N(t) = N_0.e^{-t/T}$. *Isoler t.*
6) *Radiochronologie :* $a = e^{\lambda t} - 1$. *Exprimer t en fonction de a.*

Exercices complémentaires :
Exprimer une grandeur à partir d'une formule



Exercice 1 :
Le volume et l'aire latérale d'un cône de demi-angle au sommet α *et de rayon du cercle de base r sont :*

$V = \dfrac{\pi \times r^3}{3\tan\alpha}$ *et* $A = \dfrac{\pi \times r^2}{\sin\alpha}$.

Démontrer que : $A^3 = \dfrac{9\pi V^2}{P(\sin\alpha)}$ *où P est le polynôme :* $P(x) = -x^3 + x$.

On « rappelle » que : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *et que* $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ *pour toute valeur de* α.

Cet exercice peut déboucher sur l'étude des variations de $A(\alpha)$ *(en utilisant celle de P, de la fonction cube et de sin) pour un volume fixé (angle minimisant l'aire du cornet pour un volume de 100 cm*^{3} *par exemple).*

Exercice 2 :
Dans cet exercice on veut déterminer la masse volumique moyenne de la Terre
Selon la loi d'attraction universelle (loi de Newton) deux masses M et m s'attirent selon la droite qui les relie avec une force F proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance d qui sépare les centres de gravité de ces masses.

$$F = G.\frac{m.M}{d^2}$$

Avec :
G = constante universelle de gravitation = 6,67 10 $^{-11}$ *N.kg*$^{-2}$*.m*$^{-2}$
M = Masse de la terre
m = Masse d'un autre objet (une pomme qui tombe sur le sol par exemple)
d = distance séparant les centres de gravité des de corps de masses M et m.

Au niveau du sol terrestre, la formule précédente formule prend la forme simple $F = m.g$
Avec F le poids (force gravitationnelle) et g l'accélération de pesanteur.
g = 9,82 m.s^{-2}

On modélisera la Terre par une sphère parfaite de rayon 6400 km et dont le volume est donné par $V = \dfrac{4}{3}.\pi.R^3$

(R étant le rayon de la sphère).

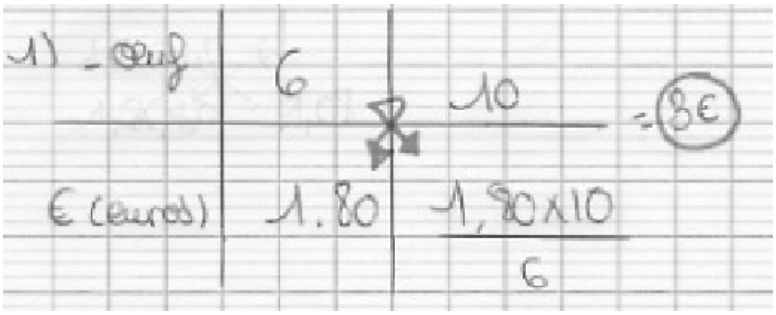
A partir de cet énoncé :
- Exprimer la masse volumique moyenne de la Terre
- Calculer la masse volumique moyenne de la Terre

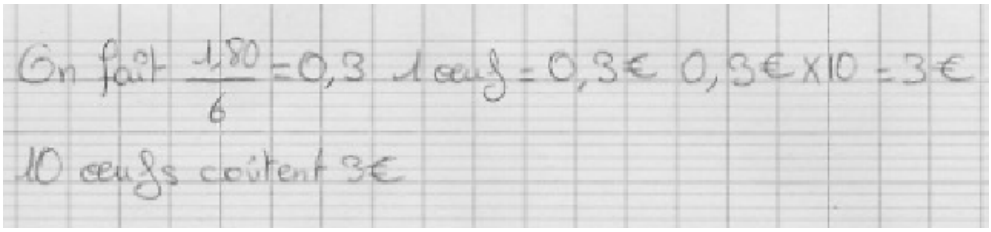
8. Annexe 8 : copies et proportionnalité

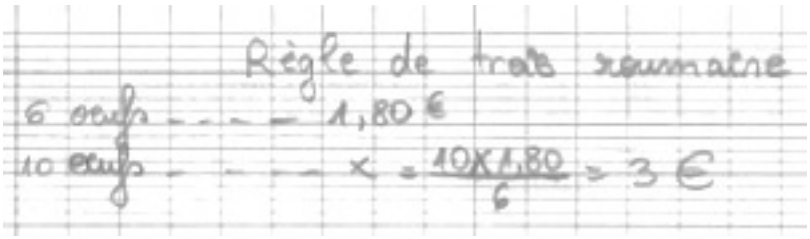
Des extraits de copies d'élèves de seconde et d'étudiants de M1 préparant le concours de Maître des Écoles autour de la proportionnalité sont proposés aux stagiaires pour alimenter la discussion.

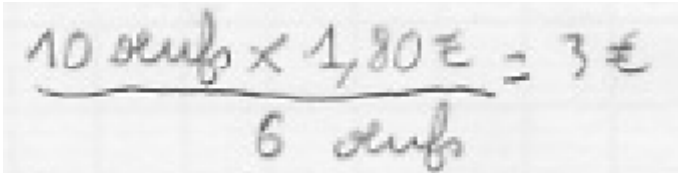
Chez les élèves de seconde – ces derniers ayant été entrainés les mois précédents à différentes méthodes de résolution de proportionnalité - on observe des réponses du type passage à l'unité ou grandeur quotient (il leur était demandé d'expliquer de rédiger comme s'ils devaient expliquer leur raisonnement à leur petit frère ou petite sœur en difficulté devant un devoir de mathématiques).

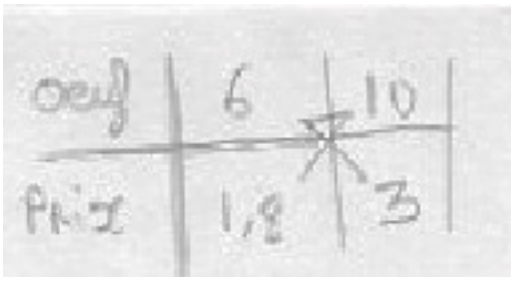
« 6 œufs coûtent 1,80 euros. Combien coûtent 10 œufs ? »
Votre petit frère ou votre petite sœur a un devoir de mathématique sur la proportionnalité. Il demande votre aide. Répondez à la question posée en expliquant votre réponse de manière à ce qu'il ou elle puisse comprendre au mieux.

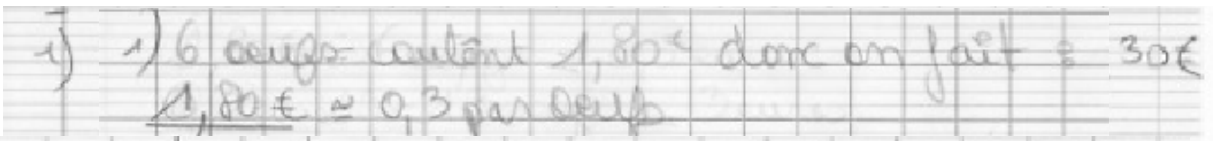


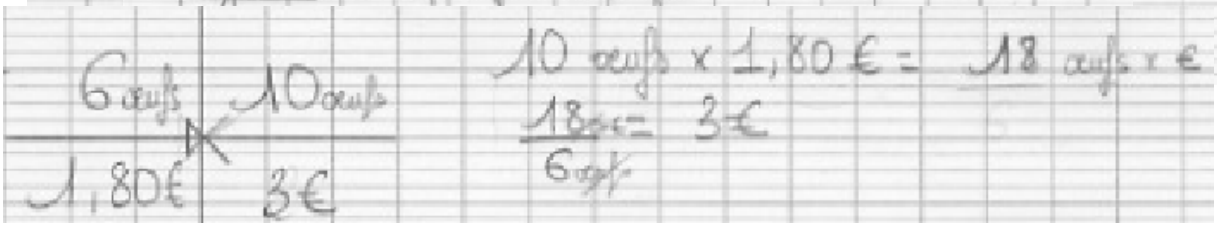








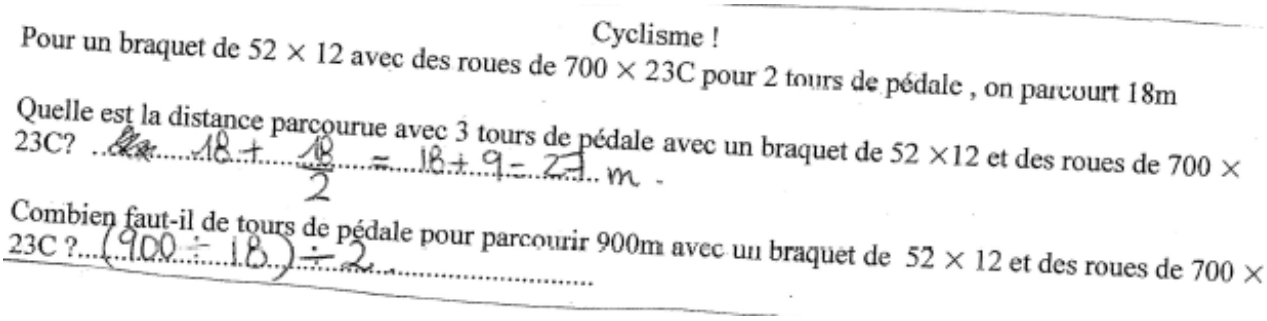


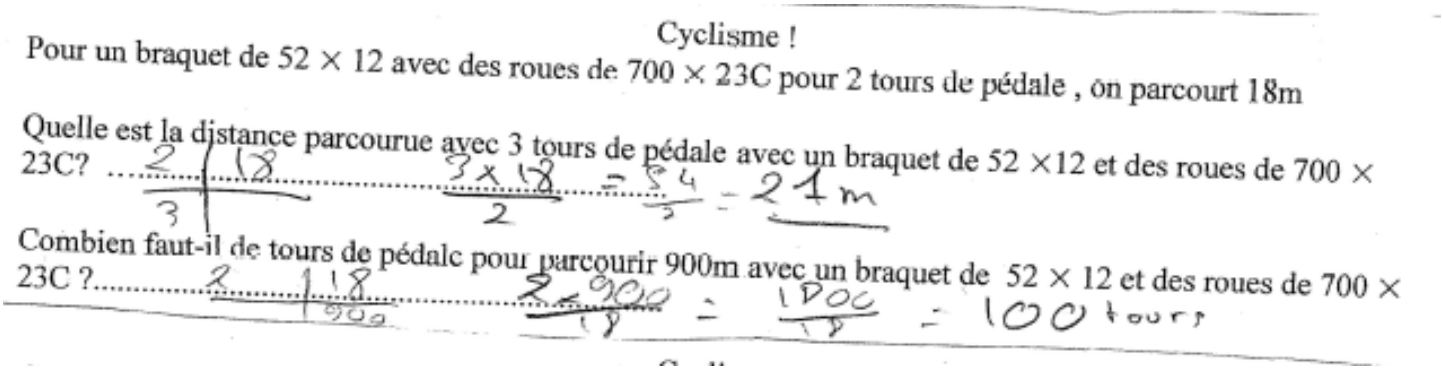


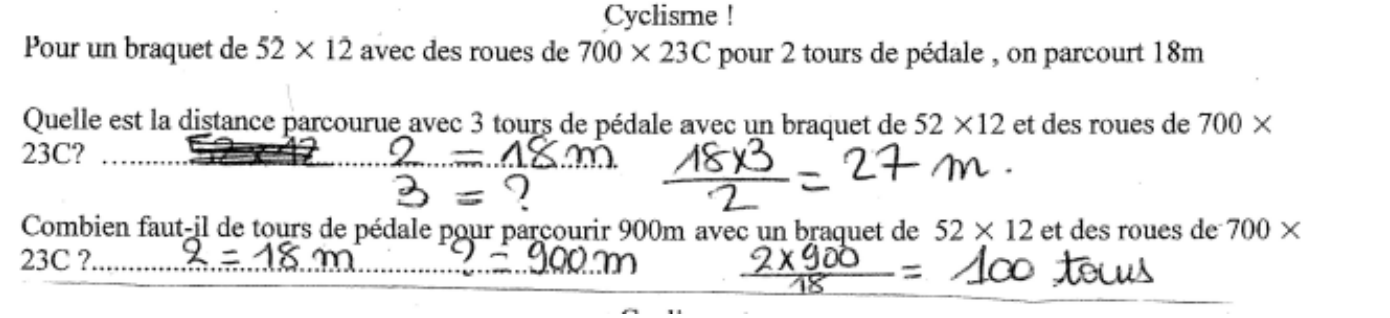
L'exemple suivant avait été proposé aux étudiants en formation des maîtres. Les informations sur le braquet[iii] ainsi que sur la taille de la roue sont des informations parasites, inutiles pour la résolution du problème.

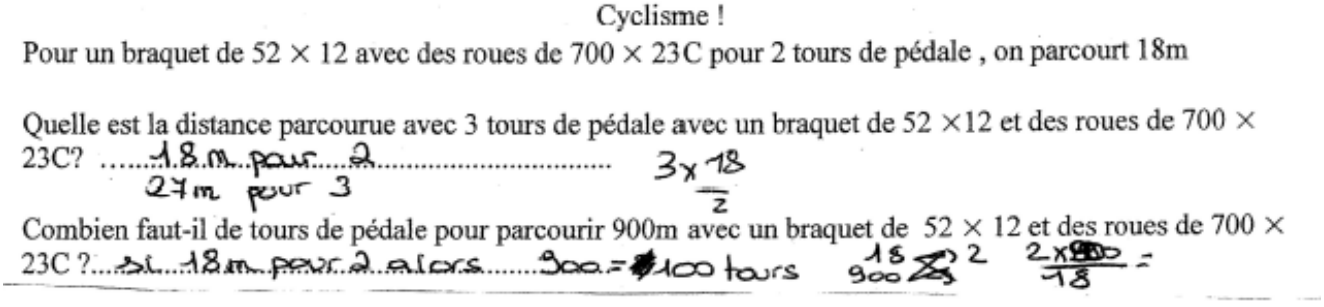
« Pour un braquet de 52 × 12 avec des roues de 700 × 23C pour 2 tours de pédale, on parcourt 18m
Quelle est la distance parcourue avec 3 tours de pédale avec un braquet de 52 ×12 et des roues de 700 × 23C?
.....
Combien faut-il de tours de pédale pour parcourir 900 m avec un braquet de 52 × 12 et des roues de 700 × 23C ?..... »

Il ressort de ces copies que chez les étudiants de M1 – ces derniers n'ayant pour beaucoup, pas fait de mathématiques depuis plusieurs années - la référence est le produit en alpha, pas nécessairement bien utilisé.


Cyclisme !
Pour un braquet de 52 × 12 avec des roues de 700 × 23C pour 2 tours de pédale , on parcourt 18m
Quelle est la distance parcourue avec 3 tours de pédale avec un braquet de 52 ×12 et des roues de 700 × 23C? ... 18 + 18/2 = 18 + 9 = 27 m .
Combien faut-il de tours de pédale pour parcourir 900m avec un braquet de 52 × 12 et des roues de 700 × 23C ? (900 ÷ 18) ÷ 2


Cyclisme !
Pour un braquet de 52 × 12 avec des roues de 700 × 23C pour 2 tours de pédale , on parcourt 18m
Quelle est la distance parcourue avec 3 tours de pédale avec un braquet de 52 ×12 et des roues de 700 × 23C? 2 | 18 / 3 ... 3 × 18 / 2 = 54/2 = 21 m
Combien faut-il de tours de pédale pour parcourir 900m avec un braquet de 52 × 12 et des roues de 700 × 23C ? 2 | 18 / 1800 ... 2 × 900 / 18 = 1800/18 = 100 tours


Cyclisme !
Pour un braquet de 52 × 12 avec des roues de 700 × 23C pour 2 tours de pédale , on parcourt 18m
Quelle est la distance parcourue avec 3 tours de pédale avec un braquet de 52 ×12 et des roues de 700 × 23C? 2 = 18m ... 3 = ? ... 18 × 3 / 2 = 27 m .
Combien faut-il de tours de pédale pour parcourir 900m avec un braquet de 52 × 12 et des roues de 700 × 23C ? 2 = 18 m ... ? = 900 m ... 2 × 900 / 18 = 100 tours


Cyclisme !
Pour un braquet de 52 × 12 avec des roues de 700 × 23C pour 2 tours de pédale , on parcourt 18m
Quelle est la distance parcourue avec 3 tours de pédale avec un braquet de 52 ×12 et des roues de 700 × 23C? 18 m pour 2 ... 27 m pour 3 ... 3 × 18 / 2
Combien faut-il de tours de pédale pour parcourir 900m avec un braquet de 52 × 12 et des roues de 700 × 23C ? si 18 m pour 2 alors 900 = 100 tours ... 18 / 900 / 2 ... 2 × 900 / 18 =

[iii] *Le braquet est le rapport du nombre de dent du plateau (ici 52) divisé par nombre de dents du pignon (ici 12). (rapport qu'on écrit dans le milieu du cyclisme avec un signe multiplié !)*

Cyclisme !

Pour un braquet de 52 × 12 avec des roues de 700 × 23C pour 2 tours de pédale , on parcourt 18m

Quelle est la distance parcourue avec 3 tours de pédale avec un braquet de 52 ×12 et des roues de 700 × 23C? 2 tours = 18 m, donc 1 tour = 9 m, donc 3 tours = 27 m

Combien faut-il de tours de pédale pour parcourir 900m avec un braquet de 52 × 12 et des roues de 700 × 23C ? 1 tour = 9 m, donc 100 tours = 900 m

Pour un braquet de 52 × 12 avec des roues de 700 × 23C pour 2 tours de pédale , on parcourt 18m

Quelle est la distance parcourue avec 3 tours de pédale avec un braquet de 52 ×12 et des roues de 700 × 23C? 27 m (tours | 2 | 3 ; m | 18 | x ⇒ x = 3×18/2 = 27)

Combien faut-il de tours de pédale pour parcourir 900m avec un braquet de 52 × 12 et des roues de 700 × 23C ? 100 tours (tours | 2 | x ; m | 18 | 900 ⇒ x = 900×2/18 = 100)

Cyclisme !

Pour un braquet de 52 × 12 avec des roues de 700 × 23C pour 2 tours de pédale , on parcourt 18m

Quelle est la distance parcourue avec 3 tours de pédale avec un braquet de 52 ×12 et des roues de 700 × 23C? 2 tours → 18 m ; 3 tours → ? ; x = 2/18

Combien faut-il de tours de pédale pour parcourir 900m avec un braquet de 52 × 12 et des roues de 700 × 23C ? même proportionnalité

Cyclisme !

Pour un braquet de 52 × 12 avec des roues de 700 × 23C pour 2 tours de pédale , on parcourt 18m

Quelle est la distance parcourue avec 3 tours de pédale avec un braquet de 52 ×12 et des roues de 700 × 23C? 18/2 = 9 ; 9 × 3 = 27 m.

Combien faut-il de tours de pédale pour parcourir 900m avec un braquet de 52 × 12 et des roues de 700 × 23C ? 900 En un tour on fait 9 m. Il faut 9 tours de pédale.

900/9 = 100 ; 900 | 100 / 9

Résolutions possibles :

Distance parcourue en mètres	18	9	27	900
Nombre de tours de pédales	2	1	3	100

Nous retrouvons toutes les possibilités

Passage par le coefficient de proportionnalité ou passage à l'unité : 18 m ÷2 tours = 9 m/tour

18 + 9 = 27 car 2 +1 = 3 (propriété additive) ou 27 = 3 × 9 car 3 = 3 × 1 (propriété multiplicative)

et 900 = 18 × 50 donc 100 = 2 × 50 ou 100 = 1 ×100 car 900 = 9 × 100 (propriété multiplicative)